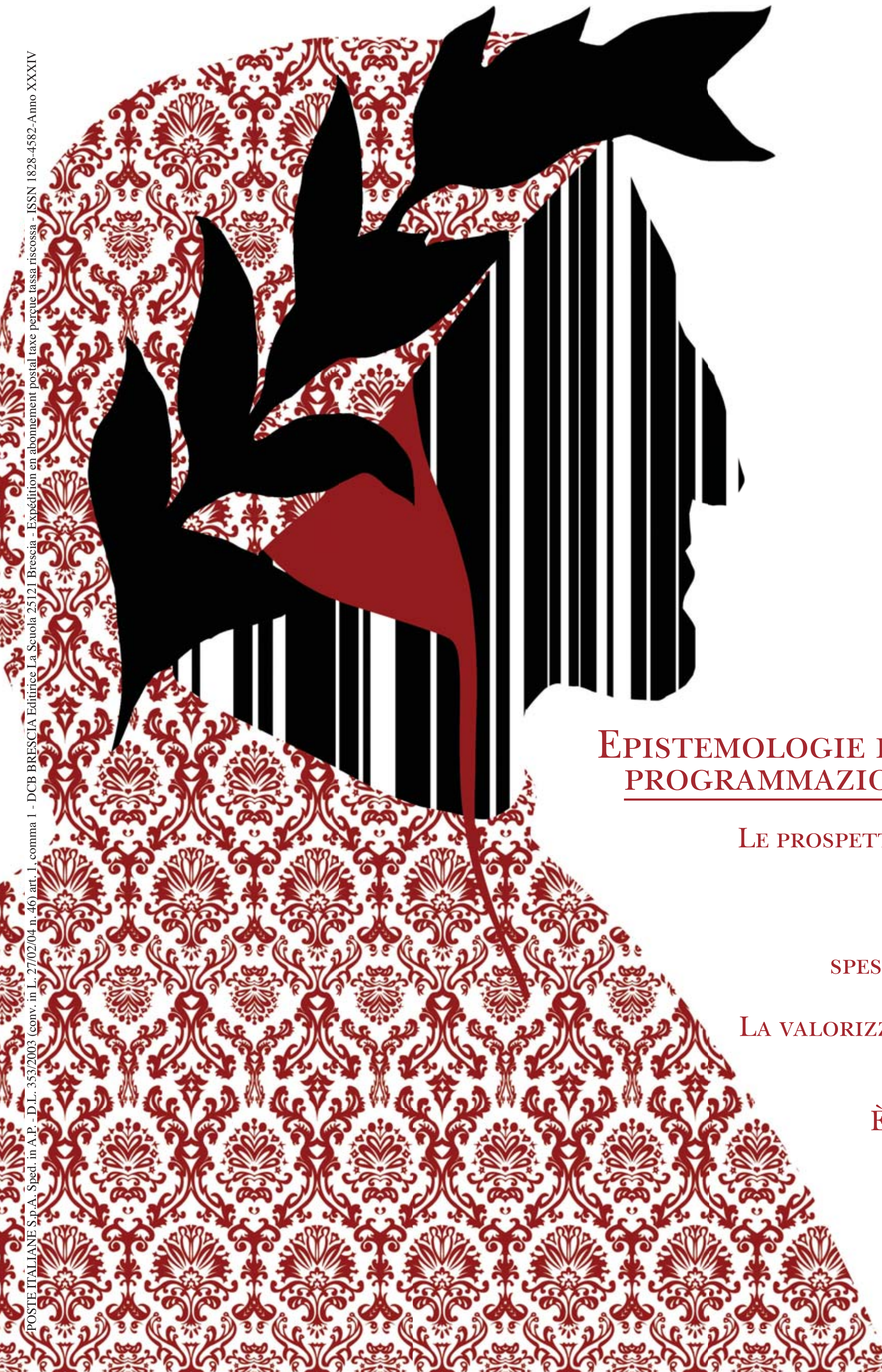
MENSILE DI RICERCA, CULTURA, ORIENTAMENTI EDUCATIVI, PROBLEMI DIDATTICO-ISTITUZIONALI
PER LE SCUOLE DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE E FORMAZIONE

NUOVA SECONDARIA

1
settembre
2016



EPISTEMOLOGIE DISCIPLINARI E PROGRAMMAZIONE DIDATTICA

LE PROSPETTIVE OCCUPAZIONALI DEGLI PSICOLOGI

SUSSIDIARIETÀ E… SPESA PUBBLICA STATALE

LA VALORIZZAZIONE DEL MERITO DEI DOCENTI

È POSSIBILE EDUCARE A SCEGLIERE IL BENE E NON IL MALE?

POSTE ITALIANE S.p.A. Sped. in A.P. - D.L. 353/2003 (conv. in L. 27/02/04 n. 46) art. 1, comma 1 - DCB BRESCIA Editirice La Scuola 25121 Brescia - Expédition en abonnement postal taxe perçue tassa riscossa - ISSN 1828-4582-Anno XXXIV

EDITRICE LA SCUOLA

Nuova Secondaria

Mensile di cultura, orientamenti educativi, problemi didattici e istituzionali per le scuole del secondo ciclo di istruzione e formazione

settembre 2016

1

Editoriale

Fatti e Opinioni

Problemi Pedagogici e Didattici

Programmare per competenze

Dall'epistemologia alle scelte didattiche. Itinerari per un anno

Lingue, Culture e Letterature

a cura di Giovanni Gobber

Libri

Sul sito di *Nuova Secondaria* disponibili lezioni con slide
http://nuovasecondaria.lascuola.it

Il caso dell'altezza. Un sapere fondante

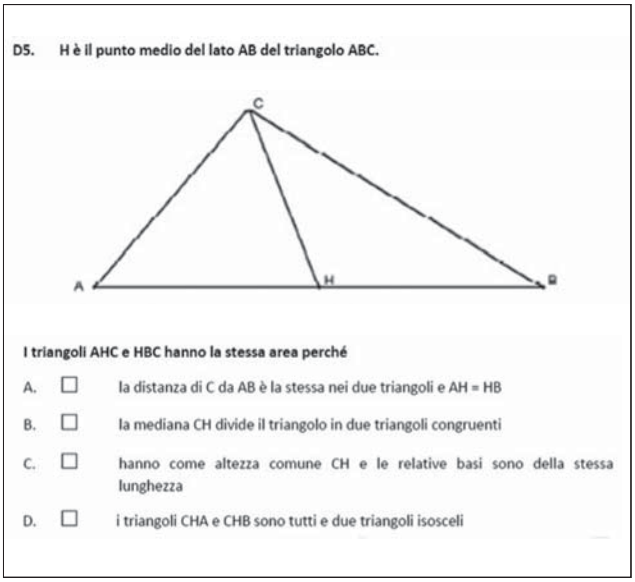
Emanuela Botta, Silvia Sbaragli

Nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica capita spesso di affrontare contenuti di complessità anche notevole che richiedono saperi di base per essere gestiti e risolti correttamente da parte degli allievi. Saperi che gli allievi dovrebbero conoscere e mobilitare nei diversi contesti reali o ideali che vengono proposti fin dalla scuola primaria e per i quali si dà per scontato, nei livelli scolastici successivi, che l'apprendimento sia avvenuto.
L'analisi dei risultati delle prove Invalsi permette di approfondire lo studio di tale fenomeno, facendoci capire come molti comportamenti non siano casuali, ma nascondano, invece, misconcezioni nella mente degli allievi anche di scuola superiore e ostacoli profondi di diversa natura.
Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso del termine "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili e, a volte, convincenti[1]. In un testo del 1998[2], Rosetta Zan parla proprio di misconcezioni come "causa di errori": «Le *convinzioni specifiche* scorrette ("misconceptions") sulla matematica sono quelle responsabili di *errori*, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile».
Le misconcezioni possono, in alcuni casi, derivare dalle scelte didattiche effettuate dai docenti ed essere quindi considerate come *evitabili*[3], è questo, in parte, il caso dell'altezza. Questo concetto viene infatti spesso maldestramente definito alla scuola primaria senza che vi sia una vera costruzione del sapere da parte degli allievi e poi non ripreso solitamente nei livelli scolastici successivi.
Una delle classiche definizioni da libro di testo per le tre altezze di un triangolo è «il *segmento* che *"parte"* da un *vertice* e *"cade"* perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento», tale definizione cambia poi a seconda del poligono considerato. Sarebbe formativo invece cercare di rispondere, insieme agli allievi dei diversi livelli scolastici, alle seguenti sollecitazioni e cercare una definizione idonea di tale concetto: l'altezza è davvero un segmento o una distanza? Come può un segmento "partire" e "cadere"? Supponendo che un segmento possa "partire", lo deve fare per forza da un vertice? Il segmento che rappresenta un'altezza deve per forza essere verticale? Si parla di altezza solo per determinate figure? Quante altezze ha un poligono?[4]
L'altezza rappresenta, quindi, un concetto all'apparenza semplice ma che nasconde al suo interno notevoli complessità.

Item a confronto

Si è scelto di riportare di seguito tre item delle prove Invalsi somministrati due nel biennio della scuola secondaria di secondo grado e uno al terzo anno di scuola secondaria di primo grado, dai quali emerge una difficoltà diffusa nel mobilitare in diverse situazioni il concetto di altezza.

Primo item. L'item è stato somministrato nel 2013 agli studenti della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado.



1. B. D'Amore, S. Sbaragli, *Analisi semantica e didattica dell'idea di 'misconcezione'*, «La matematica e la sua didattica», 2, 2005, pp. 139-163.
2. R. Zan, *Problemi e convinzioni*, Pitagora, Bologna 1998.
3. S. Sbaragli, *Misconcezioni 'inevitabili' e misconcezioni 'evitabili'*, «La matematica e la sua didattica», 1, 2005, pp. 57-71.

Nella Guida alla Lettura delle prove è riportato quanto segue:

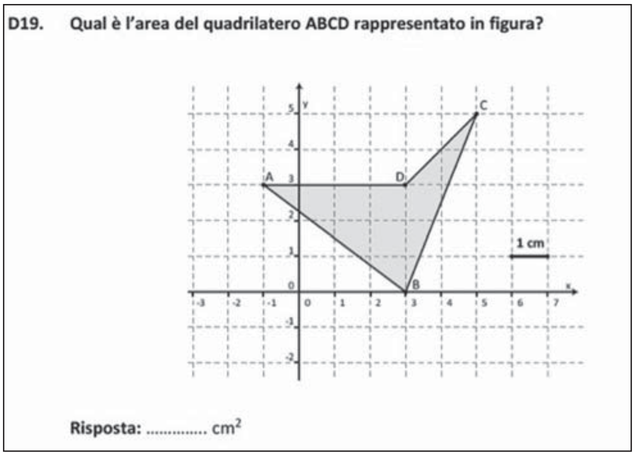
Risposta corretta	A
Commento	Per rispondere correttamente è sufficiente che gli studenti conoscano la formula per il calcolo dell'area di un triangolo e sappiano identificare la misura dell'altezza relativa a una base come la distanza tra il vertice da cui è condotta l'altezza e il lato opposto a tale vertice. Il distrattore C può essere molto attrattivo per studenti che leggono con poca attenzione: lo studente, infatti, deve riconoscere che CH non è in generale altezza, ma mediana e quindi concludere che l'affermazione contenuta nell'opzione C è falsa.

L'item è esplicitamente basato sulla nozione di area di un triangolo e in particolare sulla conoscenza e mobilitazione del concetto di altezza, così come si evince anche dal commento Invalsi. Le percentuali ottenute dalla somministrazione al campione statistico sono le seguenti:

	Mancate risposte	Opzioni			
		A	B	C	D
Generale	4,0%	22,7%	18,8%	46,4%	8,1%
Licei	4,0%	29,2%	16,3%	44,8%	5,7%
Tecnici	3,7%	18,3%	20,7%	49,3%	8,0%
Professionali	4,6%	17,1%	20,7%	45,0%	12,6%

I risultati mettono in evidenza le difficoltà degli studenti nell'identificare la risposta corretta, dimostrando di non aver acquisito criticamente la nozione di area di un triangolo. In particolare, emergono le difficoltà nell'individuare che la distanza del vertice C da AB è la stessa nei due triangoli, che corrisponde a comprendere la congruenza delle altezze dei triangoli, e che AH = HB.
Si può osservare come tale difficoltà sembra essere indipendente dall'indirizzo di studi, infatti le percentuali di scelta delle varie opzioni di risposta sono simili nei diversi indirizzi, a differenza di quanto avviene in altri quesiti presentati nelle prove Invalsi, in cui tale differenza è spesso rilevante.
Quasi la metà degli studenti concentra l'attenzione sull'opzione di risposta C, che individua come altezza comune dei due triangoli il segmento CH, che corrisponde in realtà alla mediana. Va tenuto in considerazione che H è di solito la lettera usata per indicare il "piede dell'altezza" e che molti allievi potrebbero essere stati ingannati da questo aspetto.
Nel presentare un concetto in matematica, si è *costretti* a fare ricorso a rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia alla semiotica: «In matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche»[5]. Tuttavia, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente confonda la semiotica con la noetica (acquisizione concettuale), associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso. Questo fa riflettere sul fatto che creare fissità nella nomenclatura e nelle rappresentazioni proposte agli allievi può portare a misconcezioni nella mente degli allievi, che le percepiscono come univoche e vincolanti. Risulta invece importante didatticamente variare convenzioni per permettere di riflettere ogni volta sui concetti in gioco. La scelta dei segni non è neutra o indipendente; come sostiene Radford[6]: «I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. […] Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza», tale individuazione va gestita con forte senso critico da parte dell'insegnante[7].

Secondo item. L'item è stato somministrato nel 2015 agli studenti della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado.



4. B. Martini, S. Sbaragli, *Insegnare e apprendere la matematica*, Tecnodid, Napoli 2005, p.143.
5. B. D'Amore, *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica,* Pitagora, Bologna 2003.
6. L. Radford, *La generalizzazione matematica come processo semiotico*, «La matematica e la sua didattica», 2, 2005, p. 204.
7. S. Sbaragli, *Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica*, in B. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Edises, Napoli 2012, pp. 121-139.

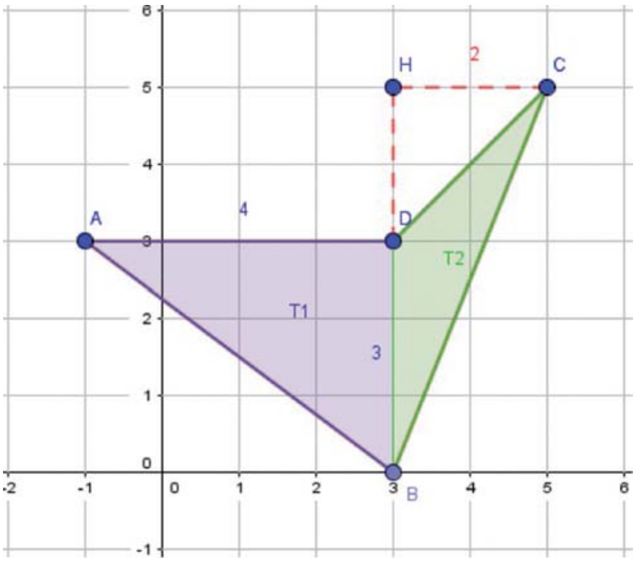
Nella *Guida alla Lettura* delle prove è riportato quanto segue:

Risposta corretta	9 cm^2
Commento	Spesso nei test Invalsi compaiono domande di questo tipo, in cui il calcolo delle aree può essere effettuato per composizione o scomposizione di figure. Qui è più semplice calcolare l'area del quadrilatero ABCD come somma delle aree dei triangoli ABD e BDC, quindi come $0{,}5 \cdot (3 \cdot 4) + 0{,}5 \cdot (3 \cdot 2) = 6 + 3 = 9\ cm^2$. Spesso gli studenti si trovano in difficoltà di fronte a quesiti simili, che dovrebbero essere abituati ad affrontare già dalla scuola secondaria di primo grado.

Questo item è solo indirettamente legato al concetto di altezza, necessario per individuare le aree dei poligoni che formano il quadrilatero. Le percentuali ottenute dalla somministrazione al campione statistico sono le seguenti:

	Mancate risposte	Corretta	Errata
Generale	23,0%	30,6%	46,4%
Licei	17,4%	40,5%	42,0%
Tecnici	23,1%	28,5%	48,3%
Professionali	34,5%	12,8%	52,7%

La strategia risolutiva descritta nel commento è illustrata nella figura seguente:



I risultati mettono in evidenza come la nozione di area di un triangolo non è stata acquisita criticamente in modo tale da poter essere applicata anche nei casi in cui ci si allontana dagli stereotipi rappresentati dalle figure tradizionali, usualmente rappresentate nei libri di testo.

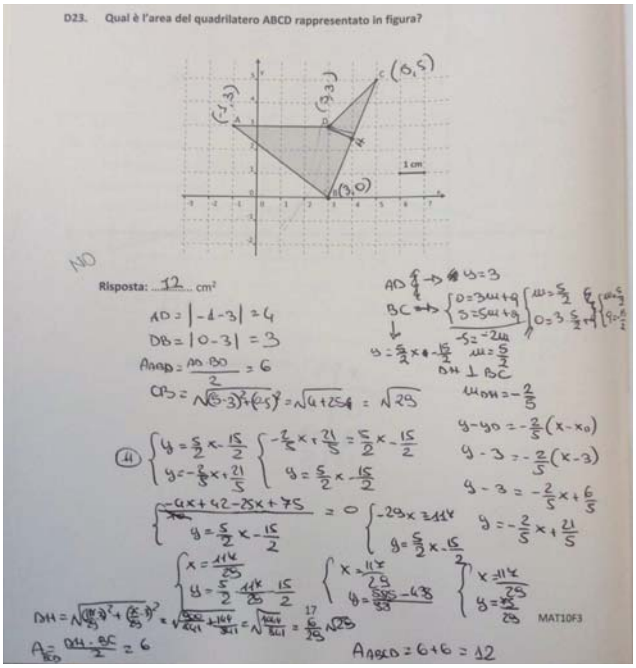
In particolare, parlando di altezza, concetto fondamentale per calcolare le aree dei poligoni, dall'analisi di circa 250 fascicoli a campione emerge come nessuno studente abbia scelto esplicitamente di individuare un segmento esterno come altezza del triangolo BDC; scelta che sembrava a priori come la più naturale.

Dai protocolli analizzati emerge come il non riconoscere un segmento esterno e disposto in posizione non standard come altezza del triangolo, spinga la maggior parte degli studenti a cercare strategie alternative a quella ipotizzata, preferendo strade lunghe, complesse o inadatte, che risultano spesso fallimentari.

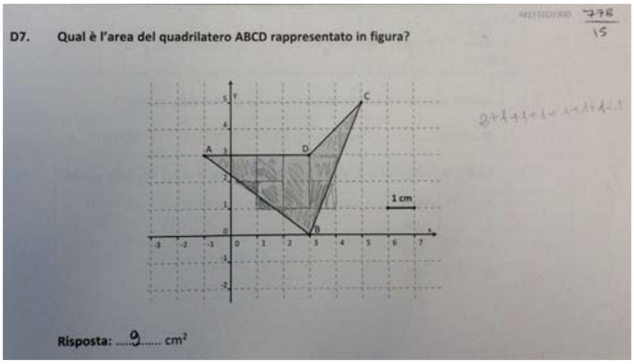
Tra queste, la più frequente è risultata quella di ipotizzare che il triangolo BDC fosse isoscele e che di conseguenza l'altezza rispetto al lato BC avesse come estremo il suo punto medio.

La scelta di tale procedimento può essere in parte attribuita alla misurazione, in fase esplorativa, dei lati DB e DC; il fatto che la differenza fra i due lati sia solo di un millimetro, può infatti aver confermato l'ipotesi errata che il triangolo BDC fosse isoscele. Un altro fattore che può aver influenzato tale scelta è la familiarità degli studenti con i problemi relativi ai triangoli isosceli, molto presenti nei libri di testo e quindi utilizzati frequentemente dai docenti.

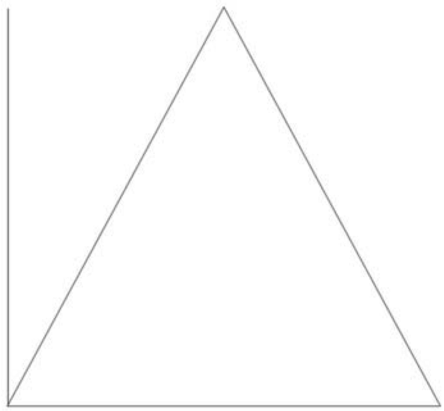
I risultati mettono inoltre in evidenza come gli studenti che dispongono di conoscenze più ampie tendono spesso a scegliere una strategia di risoluzione complessa, con esito non sempre positivo, come attesta il seguente protocollo.



Anche dall'analisi dei protocolli utilizzati dagli studenti che hanno dato la risposta corretta emerge la scelta frequente di applicare strategie alternative a quella ipotizzata, tese a ricondurre il problema al calcolo dell'area di figure più familiari, quali quella classica della differenza fra aree di figure note, rettangolo e triangoli rettangoli o quella del completamento del triangolo BDC in un parallelogramma.
Alcuni studenti, non ritenendo lecito rappresentare altezze esterne, approssimano l'area oppure dopo diversi tentativi rinunciano a risolvere.

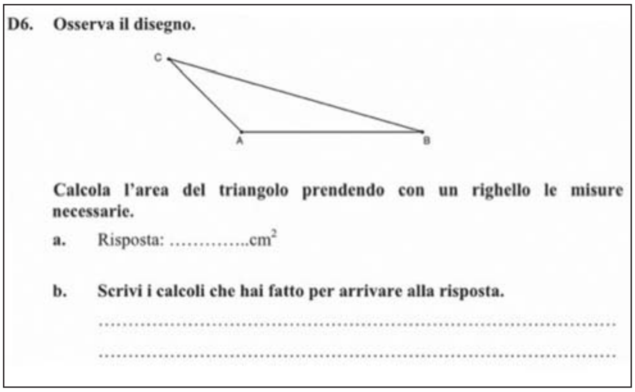


Le difficoltà rilevate da questi due item e legate al concetto di altezza derivano dai livelli scolastici precedenti; in una ricerca effettuata con allievi di V primaria emerge come la grande maggioranza non considera un'altezza di un poligono un segmento che, pur avendo un vertice in comune con il triangolo, sia *esterno* alla figura; ciò deriva dalla consuetudine didattica di rappresentare esclusivamente l'altezza di una figura con un segmento totalmente o in parte interno.
Alla domanda se il segmento qui sotto rappresentato individua un'altezza del triangolo, rispondono in questo modo: «Non è un'altezza perché finisce fuori dal triangolo».



Anche l'ormai classico studio di Hershkowitz[8], citato anche da Zan[9], effettuato su studenti di 14 anni ha evidenziato come per la maggior parte di loro l'altezza debba essere sempre interna al triangolo (66% dei casi, 8% di risposte mancanti). Tali difficoltà riscontrate in letteratura diversi anni fa, sembrano rimanere costanti negli studenti di oggi, come rivela anche il seguente item.

Terzo item. L'item è stato somministrato nel 2011 nella classe terza della secondaria di primo grado.



Nella *Guida alla Lettura* delle prove è riportato quanto segue:

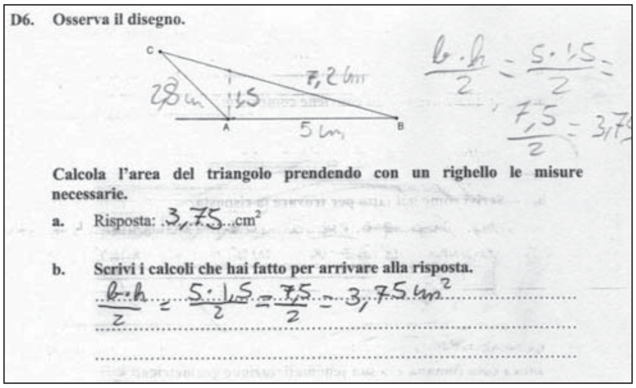
Risposta corretta	● D6a Risposte comprese tra 4,5 cm² e 5,7 cm² ● D6b Lo studente deve mostrare di aver misurato correttamente almeno un lato e l'altezza relativa e applicato la formula dell'area (oppure tutte e tre i lati nel caso abbia applicato la formula di Erone).
Commento	Lo studente deve misurare, eventualmente tracciandola, l'altezza relativa ad uno dei lati (si noti che in questo caso due delle altezze sono esterne al triangolo), e poi effettuare calcoli con numeri decimali. La risposta è considerata corretta all'interno di un intervallo (area compresa fra 4,5 cm² e 5,7 cm²) che dipende dalle misure prese e dalle approssimazioni effettuate. La domanda si presta ad una riflessione sull'approssimazione nella misura.

8. R. Hershkowitz, The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or, when "a little learning is a dangerous things". *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*. Ithaca, NY, vol. 3, 1987, pp. 238-251.
9. R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer-Verlag, Milano 2007, pp. 85-86.

Le percentuali ottenute dalla somministrazione al campione sono le seguenti:

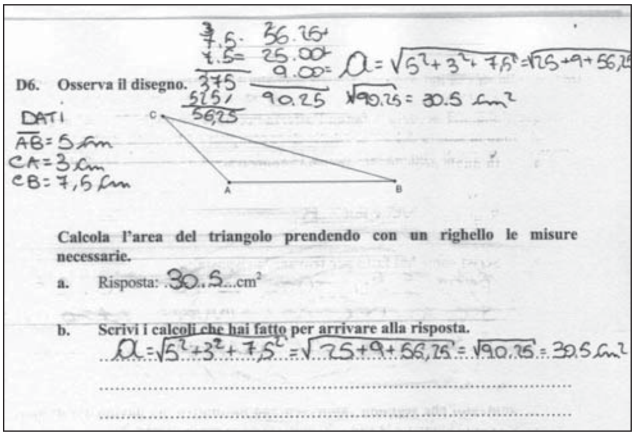
Item	Mancate risposte	Corretta	Errata
D6a	19,6%	29,0%	51,4%
D6b	22,0%	24,9%	53,1%

Dai risultati emerge che la nozione di area di un triangolo non è stata acquisita, in particolare dall'analisi di 120 fascicoli presi a campione emergono le difficoltà degli studenti nell'individuare un'altezza del triangolo. Diversi studenti rappresentano un segmento verticale, che però non rappresenta una delle altezze.



Anche la scelta didattica diffusa di rappresentare esclusivamente l'altezza *verticale* rispetto al punto di vista dell'osservatore può quindi creare misconcezioni, favorite anche dall'esplicitazione da parte dell'insegnante della frase che ricorda la direzione della forza di gravità: «… che "cade" perpendicolarmente rispetto alla base» (disposta di solito orizzontale) e da un'insidiosa prassi didattica che ha favorito per anni l'uso del filo a piombo per individuare le altezze, generando così segmenti verticali rispetto al punto di vista dal quale tradizionalmente si osserva il mondo.

Altri studenti scelgono due lati consecutivi come possibili lato e relativa altezza del triangolo o applicano in modo inopportuno il teorema di Pitagora.



Abbiamo voluto evidenziare come a concetti all'apparenza semplici e considerati di base per la scuola dell'obbligo siano legate diverse misconcezioni che perdurano nei livelli scolastici successivi. Risulta quindi importante lavorare per il superamento di tali misconcezioni legate a saperi fondanti che possono incidere sull'acquisizione di competenze da parte degli studenti. Occorre consentire agli studenti di ripensare e comprendere i diversi oggetti della matematica nella loro "essenza" e complessità dal punto di vista matematico, analizzando con elasticità e criticità le loro peculiari caratteristiche in diverse situazioni significative.

Emanuela Botta, Invalsi, Area Ricerca e Valutazione
Silvia Sbaragli, Dip. Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno

BIBLIOGRAFIA

Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2010 – 2011 Rapporto Tecnico, Invalsi, Roma 2011.
Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2013 – 2014 Rapporto Tecnico, Invalsi, Roma 2014.
Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2014 – 2015 Rapporto Tecnico, Invalsi, Roma 2015.
Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 Guida alla lettura Prova Nazionale di Matematica – Scuola secondaria di I grado, Invalsi, Roma 2011.
Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2013/14 Guida alla lettura Prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di II grado, Invalsi, Roma 2014.
Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2014/15 Guida alla lettura Prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di II grado, Invalsi, Roma 2015.