COMUNE DI CASTEL S. PIETRO TERME • 4-5-6 NOVEMBRE 2016 • INCONTRI CON LA MATEMATICA N. 30

30°

# LA MATEMATICA E LA SUA DIDATTICA
# CONVEGNO DEL TRENTENNALE

a cura di BRUNO D'AMORE e SILVIA SBARAGLI

Testi delle relazioni generali di:

Ferdinando Arzarello • Giorgio Bolondi • Ciro Ciliberto
Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla • Maura Iori • Claire Margolinas
Giancarlo Navarra • Piergiorgio Odifreddi • Silvia Sbaragli • Sergio Vastarella

Testi delle relazioni di scuola dell'infanzia di:
Anna Angeli • Anna Aiolfi e Monica Bellin • Benedetto Di Paola e Mariangela Ruisi
Claire Margolinas • Pietro Di Martino

Pitagora Editrice Bologna

# L’importanza dei saperi fondanti. Il caso dell’altezza d  i poligoni

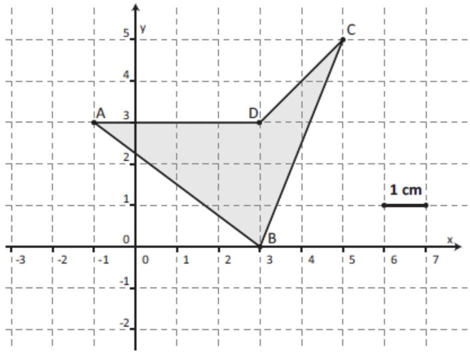
**Silvia Sbaragli**
*Dipartimento Formazione e Apprendimento-SUPSI di Locarno, Svizzera*

**Abstract.** *The difficulties of the pupils of different educational levels are presented to manage situations involving polygons heights arranged in a nonstandard location. These difficulties also depend on the educational choices made by teachers about the didactic transposition of knowledge and educational design. Choices often unique and binding that does not take into account the different semiotic means of objectification necessary to give meaning conceptual and cultural aspect of knowledge they want pupils to reach.*

## 1. Difficoltà nella scuola secondaria

Nella scuola secondaria capita spesso di affrontare situazioni di complessità anche notevoli che richiedono saperi di base per essere gestite e risolte correttamente da parte degli allievi. Saperi che gli allievi dovrebbero conoscere e mobilitare fin dalla scuola primaria e per i quali si dà per scontato nei livelli scolastici successivi che l’apprendimento sia avvenuto, ma che spesso nascondono insidie e difficoltà diffuse che perdurano nel tempo. Questo è il caso dell’altezza, un sapere di base che i risultati delle prove Invalsi dimostrano non essere posseduto neppure da parte degli allievi di scuola secondaria. In Botta e Sbaragli (2016) sono presentati i risultati di tre item delle prove Invalsi somministrati uno al terzo anno di scuola media e due nel biennio della scuola secondaria superiore, dai quali emergono difficoltà diffuse nel mobilitare in diverse situazioni il concetto di altezza di poligoni. Tali difficoltà risultano ormai classiche in letteratura (Wertheimer, 1959; Hershkowitz, 1987; D’Amore, 1993; Martini & Sbaragli, 2005).
Riportiamo di seguito uno di questi item che è stato somministrato nel 2015 agli studenti della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado.

**D19. Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato in figura?**

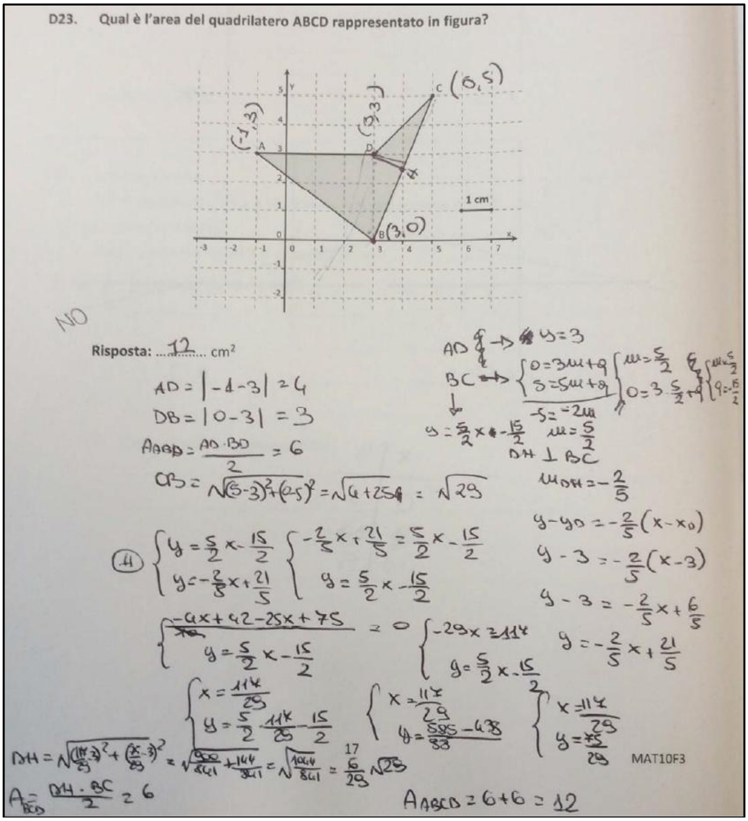



**Risposta:** ............. cm$^2$

La strategia risolutiva ipotizzata è quella di calcolare l'area del quadrilatero ABCD come somma delle aree dei triangoli ADB e BDC, per far questo occorre individuare le loro altezze. Spesso gli studenti si trovano in difficoltà di fronte a quesiti simili, che dovrebbero essere abituati ad affrontare già dalla scuola secondaria di primo grado.
Le percentuali ottenute dalla somministrazione al campione statistico sono le seguenti:

| | **Mancate Risposte** | **Corretta** | **Errata** |
|---|---|---|---|
| Generale | 23,0% | 30,6% | 46,4% |
| Licei | 17,4% | 40,5% | 42,0% |
| Tecnici | 23,1% | 28,5% | 48,3% |
| Professionali | 34,5% | 12,8% | 52,7% |

I risultati mettono in evidenza come la nozione di area di un quadrilatero non standard non è stata acquisita criticamente. In particolare, parlando di altezza, concetto fondamentale per calcolare le aree dei poligoni, dall'analisi di circa 250 fascicoli a campione emerge come nessuno studente abbia scelto esplicitamente di individuare un segmento esterno come altezza del triangolo BDC; scelta che sembrava a priori come la più naturale.
Dai protocolli analizzati emerge come il non riconoscere un segmento esterno e disposto in posizione non standard come altezza del triangolo, spinga la maggior parte degli studenti a cercare strategie alternative a quella ipotizzata, preferendo strade lunghe, complesse o inadatte, che risultano spesso fallimentari.




## 2. Difficoltà nella scuola primaria

Le difficoltà legate al concetto di altezza di poligoni presentate in Botta e Sbaragli (2016) si riscontrano alla fine della scuola primaria. In una ricerca effettuata per indagare le convinzioni di 64 allievi di quinta primaria, appartenenti a 6 classi, emergono diffuse misconcezioni, tra le quali il ritenere il vertice come punto vincolante per tracciare le altezze, la verticalità, l'univocità e il considerare l'altezza come segmento esclusivamente interno al poligono (Sbaragli, 2016).

Come esempio si riportano i risultati di alcune richieste poste in questa ricerca: Quali tra i seguenti segmenti possono essere considerati altezze dei triangoli? Colora quelle che consideri altezze dei triangoli. Motiva sotto ogni figura la tua scelta. (Si è lasciato lo spazio della motivazione sotto ogni figura, del tipo; sì/no e righe vuote).[1]

[1] Si è scelto di non indicare in maniera esplicita la perpendicolarità con simboli perché non è una prassi diffusa per la scuola primaria e avrebbe influenzato la motivazione delle risposte.

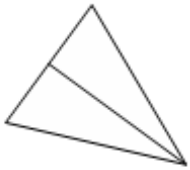


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

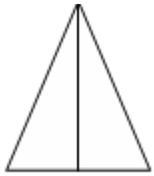


Fig. 4

Fig. 5

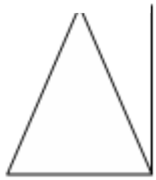


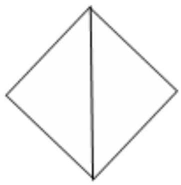
Fig. 6

Le percentuali di risposte corrette per le diverse figure distribuite fra le 6 classi sono le seguenti:

| | **Percentuali di risposte corrette** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero figura** | **Cl. A (10)** | **Cl. B (11)** | **Cl. C (10)** | **Cl. D (12)** | **Cl. E (10)** | **Cl. F (11)** |
| Figura 1 | 100% | 81,8% | 90% | 66,6% | 70% | 36,4% |
| Figura 2 | 0% | 18,2% | 0% | 16,6% | 0% | 36,4% |
| Figura 3 | 100% | 72,7% | 90% | 83,3% | 90% | 81,8% |
| Figura 4 | 100% | 90,9% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Figura 5 | 100% | 81,8% | 90% | 83,3% | 90% | 90,9% |
| Figura 6 | 0% | 90,9% | 10% | 33,3% | 20% | 54,5% |

Dai risultati emergono diffuse difficoltà nell'accettare i segmenti di figura 2 e 6 come possibili altezze dei triangoli. In particolare, nelle classi dove gli allievi rispondono alla domanda: che cos'è per te l'altezza di un poligono, con la "classica" definizione del libro (cl. A, C, D e E): «l'altezza è il *segmento* che *"parte"* da un *vertice* e *"cade"* perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento» le percentuali di riconoscimento delle altezze di queste figure sono inferiori rispetto alle altre. Questi studenti motivano le proprie scelte nel seguente modo: «Perchè l'altezza DEVE partire dal vertice e cadere perpendicolare alla base» (usata anche nel caso della figura 6), intendendo un segmento che parte dal vertice disposto nella parte superiore del foglio e che porta a considerare, una unica altezza interna alla figura; 9 di questi allievi disegnano all'interno dei triangoli quella che per loro è la "vera" altezza del triangolo.

Nella classe B, dove non è uniforme una specifica definizione di altezza, si è riscontrata una percentuale molto alta di risposte corrette nella figura 6, a differenza delle altre classi. Inoltre, gli allievi della classe F, molto legati alla verticalità, accettano maggiormente le rappresentazioni delle figure 2 e 6 come possibili altezze del triangolo, ma sbagliano di più quando l'altezza non è verticale, come nel caso della figura 1.
In una domanda successiva, gli stessi allievi affermano in percentuale molto alta che il seguente segmento rappresenta un'altezza del quadrato, dato che "misura quanto è alta la figura", nel senso di dimensione verticale, indipendentemente se riferita ad un lato del quadrato oppure no.



Altri allievi motivano la non accettazione delle altezze di figura 2 e 6 con le seguenti frasi: «Non può essere esterna», «Non può essere staccata dalla figura», «Non può essere lontana», nel senso che per loro l'altezza deve essere interna alla figura.

Le misconcezioni rilevate in questa ricerca risultano inoltre coerenti con le proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere, basate su mezzi semiotici di oggettivazione limitati e stereotipati, che non permettono all'allievo di costruirsi un sapere istituzionale. Ciò si è potuto verificare intervistando i docenti di matematica di queste classi. Si riscontra inoltre come i docenti stessi si siano costruiti concezioni dell'altezza di poligoni legate a questi limitati mezzi semiotici di oggettivazione proposti nei libri di testo per la scuola primaria, che non hanno permesso di effettuare una riflessione più ampia dell'oggetto in senso matematico. Eppure, come sostiene Radford (2005, p. 204): «I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (…) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza».
È inoltre emerso come l'altezza venga spesso maldestramente definita in modo univoco alla scuola primaria, senza che vi sia negoziazione dei saperi.

Risulterebbe invece didatticamente importante partire dalle interpretazioni di altezza che emergono dagli allievi, legate principalmente al senso comune e da queste costruire nuove immagini dell'oggetto tramite la proposta di eterogenei mezzi semiotici di oggettivazione e sollecitazioni del tipo: l'altezza è davvero un segmento o una grandezza? Come può un segmento "partire" e "cadere"? Supponendo che un segmento possa "partire", lo deve fare per forza da un vertice? Le altezze devono sempre essere interne ai poligoni? È necessario che un'altezza sia verticale? Si parla di altezza solo per determinate figure? Quante altezza ha un poligono di n lati? Tutti i poligoni hanno altezze?
L'altezza rappresenta quindi un concetto all'apparenza semplice ma che nasconde al suo interno notevoli complessità che vanno affrontate con consapevolezza da parte dei docenti.

## Bibliografia


Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). L'importanza dei saperi fondanti. Il caso dell'altezza. *Nuova secondaria*, 1, XXXIV, 112-116.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or, when "a little learning is a dangerous things", *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Ithaca, NY, 3, 238 – 251.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid. P. 143.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 39-65.

Sbaragli, S. (2016). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, in corso di stampa.

Wertheimer, M. (1959). Productive thinking. New York: Harper & Row. (Edizione ampliata rispetto alla prima, 1945). [Trad. it. Firenze: Giunti e Barbera].


**Parole chiave:** altezza di poligoni; saperi fondanti; convinzioni; misconcezioni; Invalsi.