Una lettura didattica della metafora degli "occhiali della matematica"

Silvia Sbaragli
Dipartimento Formazione e Apprendimento/SUPSI, Locarno, Svizzera
NRD, Università di Bologna

Pubblicato in: Sbaragli, S. (2014). Una lettura didattica della metafora degli "occhiali della matematica". In: D'Amore B., Sbaragli S. (2014). *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora. 49-56. 88-371-1901-1.

Abstract. *The article introduces the metaphor of the "glasses of mathematics" which for years is proposed to teachers and students. This metaphor allows a dialectical process between the tangible and the ideal, between the concrete and the abstract, which is based on the semiotic-cultural approach of Radford.*

1. Il ruolo della metafora

Le riflessioni legate alla metafora hanno accompagnato il pensiero occidentale fin dalle sue origini. Tali riflessioni si sono sviluppate in filosofia, letteratura, retorica, psicologia ecc. partendo da Aristotele fino ai giorni nostri, concependo il fenomeno metaforico come una deviazione dalla norma. Rispetto ad un linguaggio legato alla quotidianità, la metafora ha assunto il ruolo di strumento ricco, euristico e incisivo.
Come sostiene Mortara Garavelli (2010): «Di tutte le figure retoriche la *metafora* è la più facile da riconoscere e la più difficile da definire. È un "meccanismo" presente in ogni lingua, a disposizione di ognuno». Non ci addentreremo quindi a dare una definizione sintetica e esaustiva di questa figura retorica, essendo un'impresa assai difficile, forse illusoria, ma cercheremo di descrivere gli aspetti che interessano la nostra riflessione didattica.
La metafora, detta "la regina delle figure", può essere concepita come una "similitudine abbreviata", in quanto il procedimento che la genera corrisponde con la contrazione di un paragone: un'entità viene a identificarsi con quella con cui è confrontata. Se prendiamo la frase: «Francesco è uno scoiattolo» si intende che quel tal bambino è agile e svelto come uno scoiattolo. La differenza tra metafora e paragone è che nella prima le due entità vengono fuse in una, mentre nella seconda vengono mostrate separatamente le affinità e le differenze delle due entità. La metafora può essere considerata come analogia implicita che si differenzia solo per la forma con la quale è espressa (Presmeg, 1997).

Spesso il meccanismo metaforico è azionato dalla somiglianza, dall'analogia di due entità, dall'intersezione di caratteri che le due entità hanno o si suppone che abbiano in comune; tali metafore vengono dette "metafora-similitudine". Secondo Sfard (1997) vi è però una differenza fra analogia e metafora: la metafora è associata a un atto creativo che non è riconducibile all'analogia che ne può derivare.
Va sottolineato come la forza di alcune metafore sia proprio quella di fare vedere aspetti della realtà o di ciò che vogliamo concepire al di là della realtà, come sarà per quella oggetto di questo articolo. Come sostiene Mortara Garavelli (2010): «Trovare una metafora che renda più efficace il nostro modo di esprimerci vuol dire innanzi tutto avere idee migliori su quanto vogliamo dire, "vedere" con più chiarezza, profondità, originalità, come sono fatte le cose di cui parliamo. Una metafora riuscita può svelarci aspetti nascosti della realtà o aiutarci a inventarne di nuovi: è un altro modo di pensare, prima che di parlare o scrivere».

2. L'uso della metafore in matematica

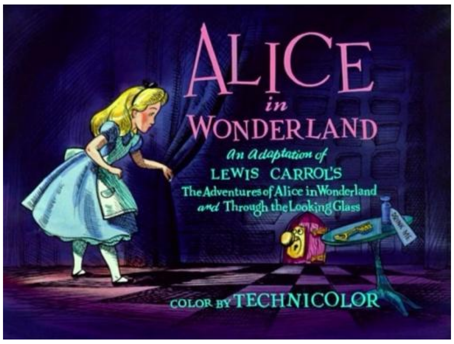
Anche se nel senso comune la metafora sembra riguardare solo l'ambito umanistico, la matematica è un linguaggio con propri contesti, metafore, sistemi di simboli e scopi. In matematica è necessario e irrinunciabile fare uso di tali figure retoriche: "Le diagonali si tagliano a metà", "Due rette a e b si intersecano", "Prolungare un segmento", "Sovrapporre due figure", "Tracciare un'altezza" ecc. sono tutte metafore nelle quali si usano parole della realtà concreta per parlare di oggetti ideali, astratti, lontani dal mondo reale.
Senza l'uso di tali figure sarebbe impensabile riuscire a concepire l'insegnamento-apprendimento matematico o addirittura la matematica stessa. Come sostiene Pimm (1987): «la metafora è centrale all'espressione del significato matematico, come all'espressione del significato nel linguaggio naturale».
Dell'importanza della funzione cognitiva della metafora, come strumento di conoscenza, non come puro ornamento del discorso, parlava già Aristotele. Sono inoltre tanti gli studiosi che sostengono l'importanza del loro uso dal punto di vista didattico. A tal proposito Gardner (1999) afferma: «È certo che educatori e ricercatori capaci sono costantemente impegnati nella ricerca di analogie e metafore adatte e feconde». Diversi autori in didattica della matematica hanno messo in evidenza una visione di tale figura come strumento cognitivo capace di creare significato piuttosto che semplicemente rappresentarlo (Lakoff, Johnson, 1980; Sfard, 1997).
In particolare, Anna Sfard (2002) ha centrato la sua attenzione su quelle metafore che hanno origine nell'esperienza reale fisica, suggerendo che questa figura può giocare un ruolo centrale nel trasferire le esperienze del corpo nel mondo delle idee matematiche, consentono di trasformare determinati processi in un oggetto matematico. Le metafore possono quindi avere un ruolo centrale

nel modo di fare le cose, pensare e dunque anche di apprendere, essendo pervasive del nostro modo di ragionare.
Anche Lakoff e Núñez (2000) attribuiscono grande importanza alle metafore, ritenendole uno dei meccanismi della mente umana che permette di formulare le idee matematiche e di ragionare matematicamente. Le riflessioni di Lakoff e Núñez non hanno trovato unanimità di consensi, c'è chi mette in discussione l'assunto che la matematica abbia radici linguistiche fondate sulle metafore, ma certamente la loro contestualizzazione in ambito didattico può portare utili ricadute nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.

3. La metafora degli "occhiali della matematica"

La metafora può avere una forte valenza sociale, culturale ed euristica, di conseguenza una notevole ricaduta in ambito didattico.
Dal 1997 abbiamo proposto a numerosissimi insegnanti e allievi di diversi livelli scolastici la metafora degli "occhiali della matematica", pensata come un confine, un limite, una soglia. Da una parte c'è un "mondo senza occhiali", che è il mondo reale, di tutti i giorni, con la concretezza dei suoi oggetti, dall'altro c'è il mondo della matematica astratto e ideale, concepito tramite gli occhiali. Indossando "gli occhiali della matematica" possiamo andare alla ricerca, tramite l'esperienza sensibile, delle proprietà che interessano il mondo della matematica (Cottino, Sbaragli, 2005; Martini, Sbaragli, 2005).
Come suggerisce l'etimologia del termine *metafora* [dal greco μεταφορά (*metaforà*), comp. di μετά (*meta*), "oltre", "dopo", "tra", e φέρω (*férō*), "portare", indica in generale un "trasferimento da un luogo all'altro" (Nöth, 1995)], tramite questa figura retorica avviene un trasferimento di significati da un luogo ad un altro, in questo caso dal mondo degli oggetti concreti al mondo degli oggetti matematici.
La metafora degli "occhiali della matematica" rappresenta un'applicazione (in senso matematico) tra due domini concettuali, attraverso la quale uno dei due domini, il *dominio obiettivo,* è compreso in termini dell'altro, il *dominio sorgente* (Lakoff, Johnson, 1980). La comprensione di una metafora si basa per i due autori sull'insieme delle corrispondenze tra gli elementi del dominio sorgente e gli elementi del dominio obiettivo. Il dominio sorgente è, in generale, più legato all'esperienza sensibile rispetto al dominio obiettivo, che risulta più astratto e meno delineato.
Gli "occhiali della matematica" possono consentire di effettuare il trasferimento tra le proprietà degli oggetti concreti (accessibili ai sensi) e le proprietà degli oggetti matematici (non accessibili ai sensi), allo scopo di comunicare e costruire strumenti di pensiero. Gli oggetti astratti, non accessibili ai sensi, come gli oggetti della matematica, riescono così a "tagliarsi", "passare", "sovrapporsi", …,"esistere".
La motivazione e volizione negli allievi, quando viene proposta questa coinvolgente metafora in classe, è notevole. L'implicazione personale degli

alunni è evidente nel voler leggere e interpretare personalmente questo nuovo mondo tramite gli occhiali, cercando di afferrare le regole del gioco.
Vi è una forte analogia tra ciò che avviene agli allievi quando indossano gli "occhiali della matematica" e ciò che avviene ad Alice quando si guarda allo specchio; sto facendo ovviamente riferimento al personaggio dei noti romanzi scritti dal matematico e scrittore inglese Charles Lutwidge Dodgson, sotto il ben più noto pseudonimo di Lewis Carroll: *Alice nel paese delle meraviglie* (1865) e *Attraverso lo specchio e quel che Alice vi trovò* (1871). Così come Alice riesce ad entrare in un mondo allo specchio dove la logica è l'analogia e il rigore è il paradosso, dove il basso e l'alto, il grande e il piccolo, il destra e sinistra, il qua e il là, s'invertono e si corrispondono, così gli allievi quando indossano gli "occhiali della matematica" concepiscono un mondo isotropo, privo di direzioni privilegiate, dove alcuni aspetti semiotici delle rappresentazioni dell'oggetto del quale si sta parlando, non contano più: il colore, il materiale del quale è costituito il modello, la posizione assunta rispetto all'osservatore ecc.; mentre risultano rilevanti altre proprietà "assolute" come il parallelismo, la perpendicolarità, le proprietà degli enti e le relazioni tra loro ecc.



Film di animazione prodotto da Walt Disney nel 1951 - scuola primaria "A. Saffi", Forlì 2004

Così come Alice guardando nello specchio si interroga su che cosa si nasconda al di là e riesce a passarci attraverso, così anche negli allievi subentra la curiosità di guardare attraverso questi stravaganti occhiali, alla ricerca di nuovi punti di vista e prospettive, entrando all'interno di questo mondo.
Come sostengono Font, Godino, Planas e Acevedo (2010): «L'oggetto metafora è sempre presente nel discorso dell'insegnante perché qui le entità matematiche sono presentate come "oggetti con proprietà" che possono essere fisicamente rappresentate (sulla lavagna, con materiali didattici, con gesti ecc.). (…) L'uso dell'oggetto metafora facilita il passaggio dalla rappresentazione ostensiva dell'oggetto a un oggetto ideale, non ostensivo. Quindi, l'uso di questo tipo di metafora porta a parlare di "esistenza" degli oggetti matematici. Questo uso può indurre gli studenti ad assumere che gli oggetti matematici esistano all'interno del discorso matematico (esistenza

interna) e, a volte, gli studenti possono supporre che essi esistano come esistono le sedie e gli alberi (esistenza esterna, fisica o reale)».
Ovviamente la riuscita del trasferimento dipende dalle esperienze e pratiche vissute, dal processo creativo innescato, dall'osservazione di somiglianze e differenze di significativi oggetti anche apparentemente diversi, la cui percezione dipende da codici culturali. Come sostiene Nöth (1995), non si può dimenticare che le metafore non sono naturali e universali, ma culturalmente determinate.

Una metafora che chiama in causa l'indossare occhiali sempre in ambito matematico, con una semantica opposta all'interpretazione da noi data in questi anni, ha origini lontane e autorevoli.
Kant nella *Critica della ragion pura* (1781; 1787) sostiene che il nostro modo di vedere il mondo non corrisponde alla realtà, ma è influenzato dalla conoscenza sensibile. Per questo usa la *metafora degli occhiali blu*: se noi nascessimo con gli occhiali blu vedremmo tutto blu, ma il blu sarebbe introdotto da noi. La soggettività, cui gli occhiali blu si riferiscono, non riguarda né le intuizioni pure né le categorie, ma è quella che Kant attribuisce alle intuizioni sensibili. Proprio come un uomo che indossa occhiali blu vedrebbe solo un mondo blu, così Kant pensava che, con i nostri pregiudizi mentali, tendiamo a vedere un solo mondo matematico. Noi esseri umani nasciamo tutti con degli occhiali sugli occhi, le lenti di questi occhiali sono una dello spazio e l'altra del tempo. Ciò significa che ogni volta che percepiamo qualcosa la collochiamo in uno spazio e in un tempo ben precisi.
L'uso della metafora degli occhiali blu di Kant fa percepire la limitatezza di affidarci solo al mondo sensibile, mentre l'uso degli "occhiali del matematico" permette di staccarsi dal mondo sensibile e consentire il trasferimento nel dominio matematico.
Per Kant ogni cognizione comporta sia un elemento concettuale sia un elemento sensibile (una intuizione sensibile, ossia una conoscenza immediata attraverso i sensi) e l'elemento sensibile si riconduce a una rappresentazione particolare. Non è la realtà a modellare la nostra mente, ma è la nostra mente a modellare la realtà. La conoscenza per Kant non è una semplice rappresentazione della realtà esterna, ma una trasformazione o ri-costruzione della realtà, degli oggetti dell'esperienza sensibile, da parte del soggetto apprendente, sulla base delle strutture cognitive da lui possedute (D'Amore, 2001). Un oggetto di conoscenza è impensabile senza concetti, cioè senza unità sintetizzanti la molteplicità delle impressioni fornite dai sensi (presentazioni o intuizioni) dell'oggetto dell'esperienza. Come sostiene Radford (2004): «Nel costruttivismo di Kant, gli individui sono concepiti come attivamente sintetizzanti le intuizioni e le impressioni. Essi giocano un ruolo dinamico: sono diventati i produttori della loro propria conoscenza». Per acquisire conoscenza l'individuo deve diventare partecipe e attivo.

4. La lettura semiotica della metafora degli “occhiali della matematica”

Nel paragrafo precedente abbiamo esplicitato come Kant abbia messo in evidenza la natura costruttiva della conoscenza e ritenuto i concetti di ragione come dati a priori; tuttavia, come sostiene Radford (2004): «sia Kant che Piaget avevano torto nel vedere la conoscenza come un processo che sale dal concreto all’astratto, dal mondo tangibile al mondo dell’intangibile conducendo, nel caso di Kant, ad una teoria chiusa nella quale l’oggetto sensibile è sussunto entro i concetti di ragione. (…) La tesi è che, nella nostra ricerca della conoscenza, noi ricorriamo a diversi sistemi semiotici. Per esempio, nel conoscere noi vediamo, interagiamo con le persone, parliamo, facciamo gesti, ed anche afferriamo oggetti e usiamo artefatti. Forse sarebbe più giusto vedere la conoscenza e i suoi oggetti come un processo dialettico continuo tra il tangibile e l’ideale, un processo intrinsecamente riferito ad artefatti e a segni».

Gli “occhiali della matematica” possono consentire un processo dialettico tra il tangibile e l’ideale, tra il concreto e l’astratto, sul quale si fonda l’approccio semiotico-culturale di Radford.

Gli oggetti della matematica non sono “cose”, non cadono sotto i sensi, nessuno li può vedere, toccare, assaporare, udire, colorare, spezzare, soppesare. L’unica cosa che possiamo fare con gli oggetti matematici è denominarli, descriverli, definirli, denotarli, disegnarli, …, cioè darne delle rappresentazioni semiotiche.

Le rappresentazioni semiotiche svolgono quindi una funzione fondamentale, quella di ricavare da oggetti noti, cioè da ciò che è accessibile ai sensi (ciò che appare), oggetti non immediatamente o non direttamente accessibili ai sensi (ciò che non appare). Lo sviluppo della matematica, e così anche del suo apprendimento da parte degli allievi, è strettamente legato alla diversificazione dei sistemi di rappresentazione semiotica. Per costruire cognitivamente un oggetto matematico, bisogna imparare a far uso con una certa padronanza di diverse sue rappresentazioni semiotiche.

Gli “occhiali della matematica” possono consentire di affrontare processi di significazione nei quali si lanciano gli studenti quando cercano di comprendere le forme di ragionamento matematico storico e culturalmente costituito, tramite diversi tipi di segni: gesti, parole, intonazioni, ritmi, simboli ecc.

Ma quali rappresentazioni considerare?

Non si può pensare che in una sola rappresentazione semiotica sia possibile rappresentare tutte le componenti concettuali di un dato oggetto matematico. Un oggetto matematico ha tante componenti connesse e legate le une alle altre. L’insegnante le vede tutte presenti e coinvolte nell’oggetto, ma l’allievo spesso non le vede tutte e anzi ne sa riconoscere solo alcune che a volte fanno rilevare proprietà che esulano dal contesto matematico.

Ciascuna rappresentazione semiotica mette in evidenza determinati aspetti dell'oggetto; è la molteplicità di rappresentazioni semiotiche che, lentamente, fa costruire cognitivamente l'oggetto nella sua complessità e integrità.
Così come Alice, arrivata al di là dello specchio, è confusa, non comprende l'ordine che regola quel mondo e, per tentare di capirlo e per avere una spiegazione di come funziona, è costretta a relazionarsi con gli strani personaggi che incontra, così gli allievi, al di là degli occhiali, per capire le regole del gioco del mondo della matematica, sono costretti a relazionarsi con le rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici.
Gli "occhiali della matematica" possono aiutare l'allievo a indirizzare la sua attenzione sui significati che le singole rappresentazioni veicolano e a rifletterci sopra con criticità, considerando pregi e difetti di ciascuna, e considerandole nello specifico contesto della matematica.
Il punto è un oggetto matematico di dimensione zero, dunque, la sua rappresentazione semiotica dovrebbe essere nulla, eppure si ha la necessità didattica di individuare una posizione per comunicare con gli allievi e siamo soliti farlo con un punto grafico di forma circolare, dimensioni ridotte, preferibilmente nero, ... Nasce così a scuola una confusione concettuale e semiotica assai diffusa tra oggetto matematico punto e segno grafico (macchia) che lo rappresenta (Sbaragli, 2003). Dopo aver indossato gli occhiali, è interessante creare e accettare diverse rappresentazioni semiotiche che fanno perdere le irrilevanti caratteristiche del punto concreto, per andare alla ricerca delle proprietà che contano nel contesto matematico.

× ↓ * º A …

Il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo e intersoggettivo, di queste rappresentazioni degli oggetti concettuali matematici, diventa fondamentale per la conoscenza.
Gli "occhiali della matematica" possono così consentire di definire il codice di riferimento, le regole del gioco di interpretazione delle rappresentazioni semiotiche, il contesto e la circostanza nella quale si opera.
In D'Amore, Fandiño e Iori (2013) si sostiene che un codice fornisce delle regole per produrre segni, ma i segni sono soltanto risultati provvisori di tale regole, sono *correlazioni transitorie*, poiché «ciascun elemento è, per così dire, autorizzato ad associarsi con un altro elemento e a formare un segno solo in date circostanze previste dal codice» (Eco, 1975).
L'esempio riportato da Eco è quello del "piano" che può essere correlato ai contenuti "livello", "progetto", "lentamente", "strumento musicale" ecc.
Gli occhiali possono aiutare l'allievo a contestualizzare la situazione in ambito matematico, in modo da evitare l'incomprensione o rifiuto del messaggio da parte del destinatario (nel nostro caso l'allievo) per assenza di codice, con la

conseguenza che l'informazione arriva come segnale fisico non decodificato o "rumore" (Eco, Fabbri, 1978).
Con gli "occhiali della matematica" è possibile una riflessione e azione specifica sul mondo, realizzata attraverso diversi tipi di rappresentazioni, creando una rete complessa di significati che si rinnovano giorno dopo giorno nella vita pratica e concreta dell'aula.
Così come Alice, su di una scacchiera, dopo aver superato prove e difficoltà, vede cambiare di volta in volta il mondo attorno a lei e da pedina bianca si trasforma in Regina, così gli allievi indossando gli occhiali potranno giocare sulla scacchiera della matematica incontrando e conoscendo in modo sempre più profondo e consapevole gli oggetti della matematica tramite rappresentazioni semiotiche, trasformandosi come Gauss nei "Principi della matematica".

Bibliografia

Cottino, L., & Sbaragli, S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazione semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.

D'Amore, B., Fandiño M.I, & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Bologna: Pitagora.

Font, V., Godino, J.D., Planas, N., & Acevedo, J.I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics.* 30(1), 15-19.

Gardner, H. (1999). *Sapere per comprendere*. Milano: Feltrinelli.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Eco, U. & Fabbri, P. (1978). Progetto di ricerca sull'utilizzazione dell'informazione ambientale. *Problemi dell'informazione*. 4, 555-597.

Kant, I. (1787). *Critique of Pure Reason*. (Trad. N. Kemp Smith. II edizione, 1965). New York: St. Martins Press.

Lakoff, G., & Johnson M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press. [Ed. Italiana: (2004). *Metafora e vita quotidiana*. Milano: Bompiani].

Lakoff, G., & Nùñez, R. (2005). *Da dove viene la matematica.* Torino: Bollati Boringhieri.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.

Mortara Garavelli, B. (2010). *Il parlar figurato*. Bari: Editori Laterza.

Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: communication in mathematics classroom*. London: Routledge & Kegan Paul.

Presmeg, N.C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies. In: English, L.D. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica,* 1, 4-23.

Sbaragli, S. (2003). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica*. Bellinzona (Svizzera), 47, 49-58.
Sfard, A. (1997). Commentary: on metaphorical roots of conceptual growth. In: English, L.D. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
Sfard, A. (2002). Thinking in metaphors and metaphors for thinking. In: Tall D., Thomas M. (Eds.). *Intelligence, learning and understanding in mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Flaxon: Post Pressed, 79-96.

Parole chiave: metafora; "occhiali della matematica"; semiotica; rappresentazione.