



Le diverse rappresentazioni del punto

Luigia Cottino

Carla Nobis

Silvia Sbaragli

IL PARADOSSO DI DUVAL

Le considerazioni riportate in questo laboratorio nascono dall'analisi del paradosso di Duval riferito agli enti primitivi: "(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, dall'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le loro rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile".

Questa confusione viene amplificata per gli enti primitivi, che, poiché non possono essere definiti, vengono lasciati all'intuizione. Di essi si forniscono sempre e solo rappresentazioni univoche e convenzionali: come per esempio il punto come un "pallino" e la retta come una "linea diritta continua illimitata".

MODELLI ERRONEI

Continuiamo a leggere Duval: "E, al contrario, come possono essi [i soggetti] acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica e attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche".

Per questo abbiamo dato primaria importanza alle rappresentazioni semiotiche in un contesto assai delicato come quello degli enti primitivi della geometria, proponendo attività che consentano di svincolarsi da rappresentazioni fisse e stabili che provocano "modelli erronei" nella mente degli allievi e degli insegnanti.

Piano di lavoro

COLLEGAMENTI • Matematica, classe quarta, "La Vita Scolastica" n. 7/2003, pp. 73-75. Laboratorio di Matematica *Il punto nei diversi ambiti*, classe terza, Dossier I, classi terza, quarta e quinta, pp. 24-26.

UTILIZZAZIONE PER GRUPPI • Lavori individuali, a coppie, a piccoli e a grandi gruppi, discussioni e confronti collettivi.

PREREQUISITI • Aver familiarizzato con l'ambito geometrico. Avere intuito "le regole del gioco" della Matematica. Avere capacità di base grafiche, manipolative, di immagine mentale.

OBIETTIVI • Percepire la "debolezza" delle rappresentazioni in matematica. Cogliere ciò che sta al di là di una rappresentazione. Inventare rappresentazioni diverse per lo stesso concetto. Effettuare "trattamenti" (passaggi da una rappresentazione a un'altra dello stesso concetto nello stesso registro semiotico) e "conversioni" (passaggi tra rappresentazioni di un concetto in registri semiotici diversi).

SPAZI E TEMPI • L'aula o il laboratorio; la palestra. 1 ora e 30 a scheda.

MATERIALI • Stuzzicadenti della stessa lunghezza e pongo; strisce di cartoncino della stessa lunghezza e fermacampioni; geopiano ed elastici; barrette e sfere del geomag; liste e viti del meccano. Bottoni, tappi, carta crespata, stelline, dadi, pasta di varie forme, patate... Laser, tulle, filati diversi, pennelli di diversa misura, fogli di carta.

RACCORDI • Arte e immagine. Educazione alla cittadinanza.

Come personalizzare

IL COMPORTAMENTO DEI BAMBINI

Elenchiamo in quanti e quali modi è stato rappresentato il punto ed evidenziamo l'eventuale persistenza della rappresentazione "tondeggian-te". Chiediamo a ognuno di stilare un elenco di quelle che considera le rappresentazioni possibili del punto matematico: così ciascuno può valutare di quanto e come si è allontanato dalla rappresentazione stereotipata. Nel caso del "cubo pazzo", se qualcuno trova forme diverse per i vertici dello stesso cubo, siamo sulla strada che conduce alla rottura dello stereotipo. Procediamo così anche per la retta.

APPUNTI PER IL PORTFOLIO

Scriviamo la successione delle proposte: per ciascuna ogni bambino indica quale tipo di rappresentazione ha usato. Alla fine, ciascuno di noi avrà una breve storia della sua iniziale "lotta" contro gli stereotipi.

SCHEDA 1

Lotta agli stereotipi!

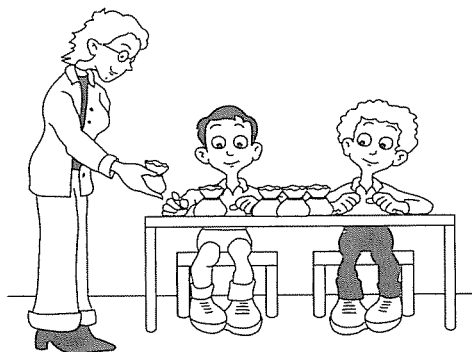
TANTI MODELLI DI "PUNTO"

1 Quando presentiamo ai bambini una serie di "modelli" della geometria chiediamo, tra le altre cose, di contare i vertici di una certa figura. I bambini li vedono, li toccano, li contano. Si convincono che quei punti esistono realmente e che sono "tondi".

2 Cerchiamo di far accettare l'idea che il punto in matematica esiste solo nella nostra mente, non si potrebbe neppure rappresentare, dato che per Euclide il punto non ha dimensioni. Come è allora possibile rappresentare un oggetto privo di dimensioni? Senza la rappresentazione come facciamo a capirci? Conviene allora creare una grande varietà di rappresentazioni, di "modelli" del punto, che ci permettano, per lo meno, di allontanare gli stereotipi.

PUNTI-VERTICI TRAMITE OGGETTI

1 Dividiamo la classe in coppie e chiediamo di costruire "modelli" di quadrato con materiali diversi. Ogni coppia riceve cinque sacchetti, ciascuno dei quali contiene il materiale necessario per costruire un "modello" di quadrato.



Il primo contiene stuzzicadenti e pongo; il secondo strisce di cartoncino e fermacampioni; il terzo un piccolo geopiano ed elastici; il quarto barrette e sfere geomag; il quinto liste e viti del meccano.

2 Quando tutte le coppie hanno terminato le costruzioni, chiediamo in quanti e in quali modi hanno rappresentato i vertici del quadrato. Chiediamo ai bambini di fare l'elenco degli oggetti che hanno usato per rappresentare i punti-vertici.

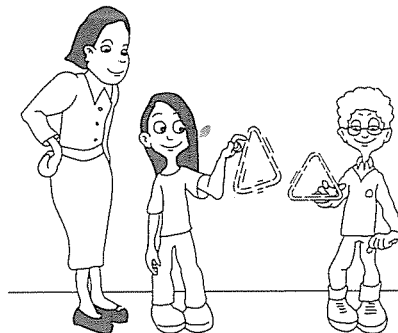
PUNTI-VERTICI CON IL CORPO

1 Conduciamo i bambini in palestra e dividiamoli in gruppi. Chiediamo a ogni gruppo di costruire una qualsiasi figura geometrica con i loro corpi. Immaginiamo che un gruppo abbia costruito un trapezio: probabilmente avremo 4 bambini in piedi o accucciati che danno forma al trapezio evidenziando i punti-vertici con il corpo; bambini che si sdraiano e rappresentano i lati con il corpo e i vertici con la testa o i piedi; bambini in piedi a braccia tese che rappresentano i vertici dandosi la mano.

2 Fotografiamo, se è possibile, tutte le rappresentazioni prodotte e con esse costruiamo un cartellone.

PUNTI NELL'ARIA

1 Chiediamo di disegnare un triangolo nell'aria con un dito. Spieghiamo che si tratta quasi di un dito magico; quando arrivano al punto-vertice, ciascuno deve eseguire una pressione nell'aria.



Ripetiamo il disegno ancora una volta, lentamente e in silenzio: seguiamo il percorso e quando il dito si trova su ogni vertice interveniamo con un suono (un battito di mani, un colpo di tamburo, un fischio, uno squillo di trombetta, un gorgheggio...). Abbiamo così evidenziato due modi per rappresentare il vertice.

2 Chiediamo di segnare un punto sul contorno (che non sia un vertice) o all'interno del triangolo disegnato in aria: ognuno dichiara come vuole rappresentarlo sapendo che non può sfruttare quello che fino a ora è stato proposto. Disponiamo i bambini in gruppi: a turno uno di loro disegna nell'aria una figura, un altro indica un punto qualsiasi della figura e un terzo lo segnala come vuole. Ogni gruppo rappresenta il proprio lavoro su un cartellone.

UN CUBO PAZZO

1 Chiediamo a ogni bambino di costruire un cubo: consegniamo a ciascuno 12 cannucce e mettiamo a disposizione materiale vario per rappresentare i punti-vertici: bottoni, tappi, carta crespata, stelline, dadi, pasta di varie forme, patate...

2 Diamo una limitazione: non si possono rappresentare i vertici con forme sferiche. Quando il cubo è terminato, chiediamo a ciascuno di rappresentare alcuni punti del cubo, che non siano vertici, in modi diversi.

PUNTI CON LA MATITA

Chiediamo ai bambini di rappresentare su di un foglio un punto e lasciamoli lavorare senza intervenire. Esponiamo tutti i lavori su di un cartellone: ci aspettiamo di trovare rappresentazioni di fantasia, come stelline, crocette, cuoricini...



SCHEDA 2

Con gli occhi di Euclide

MA CHE STRANE RICHIESTE...

1 Facciamo ai bambini la seguente richiesta: "Portatemi un punto matematico". Può accadere che qualcuno consegni uno degli oggetti sfruttati nei lavori precedenti per rappresentare il punto. In questo caso rispondiamo che non hanno soddisfatto la nostra richiesta, perché hanno consegnato un oggetto o un'immagine che rappresenta il punto, non il punto stesso.

2 Se siamo fortunati, qualcuno intuirà che non si può soddisfare la nostra richiesta perché il punto matematico per Euclide non ha dimensioni, può esistere solo nella nostra mente (si veda anche il laboratorio *Il punto nei diversi ambiti*, classe terza, Dossier 1, classi terza, quarta e quinta, pp. 24-26). Con queste considerazioni, sicuramente qualcuno rimarrà perplesso.

3 Mettiamo in evidenza l'assurdità della nostra richiesta iniziale: nessuno può consegnare realmente un punto matematico, possiamo solo considerare una sua rappresentazione che, per accordi presi tra noi, lo rispecchi. E quando finalmente avremo condiviso la scelta che il punto in matematica non ha dimensioni e che quelle che noi facciamo sono solo rappresentazioni per capirci, possiamo usare con tranquillità lo stereotipo: il punto "tondeggiate".

4 Continuiamo il gioco delle richieste strane chiedendo di portarci il 5. Anche in questo caso dopo aver osservato il comportamento dei bambini (potrebbe accadere che un bambino consegni 5 oggetti), possiamo ripetere che non si può portare il 5, in effetti quelli consegnati sono solo 5 particolari oggetti.



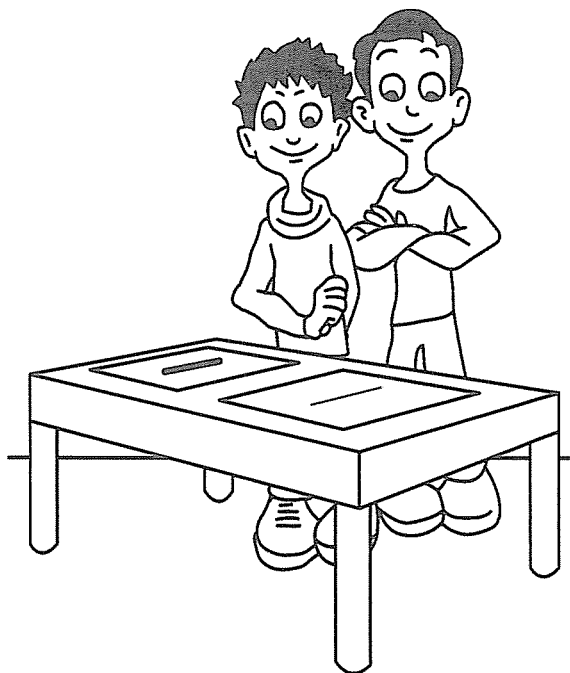
È però possibile indicare con diverse rappresentazioni questa quantità, ma queste saranno solamente e semplicemente rappresentazioni di un qualcosa di più ampio. Facciamo quindi notare, affidandoci alla storia dei numeri, che esistono tanti segni per rappresentare una stessa quantità.

DISEGNIAMO RETTE

1 Consegniamo a ciascun bambino un pennello di diversa grandezza e un foglio.

Chiediamo di tracciare sul foglio una retta. Avremo rette più spesse e rette più sottili. Rimettiamo in gioco il nostro grande Euclide e diciamo ai bambini che il matematico greco affermava che la retta ha una sola dimensione.

2 Chiediamo ai bambini di guardare tutte le rette tracciate con gli "occhi" di Euclide: quale di queste potrebbe essere accettata? Varie potrebbero essere le risposte: qualcuno potrebbe dire la più sottile, qualcuno potrebbe non dire nulla, qualcuno potrebbe dire nessuna.



3 Mettiamo in evidenza che la risposta attesa è nessuna, ma aggiungiamo che, come per il punto, abbiamo pur sempre bisogno di rappresentarla.

NUOVE RAPPRESENTAZIONI PER LA RETTA

1 Chiediamo a ciascun bambino di rappresentare almeno in tre modi diversi la retta di Euclide. Riproduciamo su un cartellone tutte le proposte.

2 Se necessario, arricchiamo ulteriormente il cartellone con rette individuate da punti allineati, da tratto-punto, da un dito, da fili tesi di nylon sottilissimi, da luce laser che passa attraverso schermi di tulle...

L'importante è a questo punto liberare completamente la fantasia.