Le convinzioni di allievi di 5 anni sull'idea di "metà"

Silvia Sbaragli
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bologna e Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Con la collaborazione del Gruppo *"Matematica in Rete"*, Corinaldo[1]

Pubblicato in: Sbaragli S. (2008). Le convinzioni di allievi di 5 anni sull'idea di "metà". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* Prima parte: 31A, 1, 33-51. Seconda parte: 31A, 2, 109-128.

Sunto. *In questo articolo si presentano attività inquadrate come pratiche personali inerenti il concetto di metà nella scuola dell'infanzia. In particolare, si sono indagate le convinzioni personali di 42 bambini di cinque anni riferite a questo sapere, le rappresentazioni semiotiche scelte e riconosciute, i significati e il senso attribuito dagli allievi a questo oggetto matematico, rilevando una grande varietà di competenze e interpretazioni da parte degli allievi.*

Summary. *In this article we present activities framed as personal practices concerning the concept of one half in kindergarten. In particular, we have investigated the personal convictions of 42 five years old children regarding this knowledge, the chosen and recognised semiotic representations, the meanings and the sense ascribed to this mathematical object, noticing a great variety of skills and interpretations in the students' behaviour.*

1. Introduzione

Questo articolo, riguardante il concetto di *metà* nella scuola dell'infanzia, si inserisce all'interno di una serie di ricerche realizzate sul

---

[1] Le insegnanti del gruppo: Antonella Alfonsi, Laura Baldi, Cinzia Bambini, Patrizia Barboni, Tiziana Brescini, Marialina Brunetti, Stefania Buschi, Paola Buzi, Lorella Campolucci, Floriana Cicerchia, Noemi Cicetti, Lara Conti, Lorella Conti, Antonietta Fracchiolla, Maria Teresa Galli, Simona Giancamilli, Lorenza Lenci, Maria Mancinelli, Miriam Manoni, Simonetta Manoni, Giuliana Mantoni, Danila Maori, Elena Morbidelli, Massimina Paolinelli, Rossana Pistelli, Maria Grazia Rosi, Laura Rossini, Anna Maria Rossolini, Katia Rugini, Elda Maria Santinelli, Cristina Sartini, Valentina Sparacciari, Angela Tommasetti.

tema frazioni con il Gruppo "Matematica in Rete" costituito da 33 insegnanti (8 di scuola dell'infanzia, 23 di scuola primaria, 2 di scuola secondaria di I grado) di diversi Istituti della provincia di Ancona, 2 delle quali, Lorella Campolucci e Danila Maori, con funzioni trainanti. Per capire come si inserisce questo articolo all'interno del percorso seguito sul tema delle frazioni, riteniamo importante accennare le fasi salienti dell'esperienza di apprendimento e di ricerca–azione effettuate dal Gruppo "Matematica in Rete" sotto la supervisione e con la collaborazione del NRD di Bologna.
Inizialmente, la ricerca è stata rivolta alle insegnanti che hanno espresso le loro convinzioni preliminari sul tema frazioni; successivamente, dopo uno studio consapevole e adulto, dai punti di vista matematico, epistemologico e didattico, si sono riscontrati notevoli cambi di convinzioni nelle insegnanti del gruppo. Lo studio è avvenuto tramite corsi di formazione e in momenti collettivi tra i partecipanti seguendo il testo di Fandiño Pinilla (2005) che ha portato ad un primo articolo di ricerca (Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2006) scritto secondo la metodologia della learning story, costituito da interventi diretti delle insegnanti che sono vere e proprie riflessioni personali concernenti i loro cambi di convinzioni. Tali cambi hanno consentito di rivedere le posizioni delle insegnanti per quanto concerne le scelte didattiche e metodologiche relative alle frazioni, avvenute sempre in àmbito di ricerca-azione.
In questo articolo presenteremo una prima tappa della trasposizione didattica effettuata dalle insegnanti di scuola dell'infanzia come conseguenza dei cambi di convinzioni in esse avvenuti ed è riferita esclusivamente all'idea di *metà* posseduta da 42 bambini di 5 anni.
In particolare, le esperienze analizzate in questa ricerca sono rivolte ad indagare le convinzioni personali dei bambini sul concetto di metà, le scelte che compiono nel parlare di questo sapere, le diverse rappresentazioni che utilizzano o che riconoscono per indicare tale concetto, i tratti distintivi delle rappresentazione sui quali puntano l'attenzione, il senso che forniscono a tali rappresentazioni.

2. Quadro teorico

I riferimenti concettuali sui quali è basata questa ricerca sulla metà rivolta ad allievi di 5 anni si possono distinguere per chiarezza espositiva in tre filoni distinti strettamente collegati tra loro:

- pratiche personali;
- frazioni;
- semiotica.

2.1 Pratiche personali

In questo lavoro si è scelto di dare grande rilievo epistemologico alla prospettiva socioculturale ed all'interpretazione delle "pratiche"[2] come costituenti le trame di costruzione concettuale, in chiara visione anti - realista. [Sull'interpretazione della prospettiva socioculturale, si può vedere l'intervista – colloquio D'Amore, Radford, Bagni (2006); sulle pratiche nell'attività matematica in aula, si veda D'Amore, Godino (2006); sulla dicotomia realismo – pragmatismo, si può vedere D'Amore, Fandiño Pinilla (2001), D'Amore (2003a), D'Amore, Godino (2006); in quest'ultimo lavoro si propone un'analisi storico – critica delle prospettive derivate, antropologica ed ontogenetica].
In particolare, ci siamo occupati delle *pratiche personali*, ossia dell'insieme delle conoscenze soggettive che emergono dai modi di pensare e di attuare degli allievi, allo scopo di indagare le loro *convinzioni* iniziali e il loro rapporto personale con l'oggetto in gioco, rappresentato in questo articolo dall'idea di metà. È oggi infatti universalmente riconosciuto che le convinzioni sono costituenti importanti dell'insieme delle conoscenze, dato che le determinano e le condizionano, come aveva già rilevato Schoenfeld (1983) oltre vent'anni fa. [Per la bibliografia specifica su questo argomento si vedano D'Amore, Fandiño Pinilla (2004)]. In particolare, in questa ricerca abbiamo puntato l'attenzione sul *significato personale* attribuito dagli allievi al concetto di *metà*, ossia sui sistemi di pratiche operative e discorsive realizzate dai bambini per risolvere una o più situazioni proposte su questo oggetto matematico. Nel fare questo, abbiamo quindi dato risalto alla *cognizione individuale* dell'allievo, che rappresenta il

[2] «Si considera *pratica matematica:* "qualsiasi azione o espressione (verbale, grafica, comunicativa ecc.) realizzata da un essere umano per risolvere problemi, comunicare la soluzione ottenuta, validarla, generalizzarla ad altri problemi o, più in generale, ad altri contesti" (Godino, Batanero, 1998, p. 192). Più che una pratica particolare di fronte ad un problema concreto, nello studio della matematica interessa considerare i sistemi di pratiche (da tutti i punti di vista: operative e discorsive) usate o evidenziate degli essere umani durante la loro messa in atto di fronte a tipi di situazioni problematiche» (D'Amore, Godino, 2006, pp. 27-28).

risultato del pensiero e dell'azione di un individuo di fronte ad una certa classe di problemi. La terminologia specifica è presa a prestito da Godino, Batanero (1994).
Parlando di metà con allievi di 5 anni, abbiamo anche considerato che l'oggetto matematico in gioco e il significato di tale oggetto, emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane e i bisogni dell'allievo. Ossia, soprattutto per bambini di questa età, ma non solo, il concetto di metà è pensato come simbolo di unità culturale emergente da un sistema di usi. In questa visione pragmatica è quindi centrale l'allievo che si mette in relazione al concetto di metà e non il concetto di metà in sé: «quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno di certe istituzioni, si realizzano determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati ed alle attività realizzate dagli essere umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica» (D'Amore, Godino, 2006, p. 26). Tra i tipi di usi relativi al concetto di metà che verranno individuati dagli allievi in determinati contesti, alcuni potranno poi essere focalizzati e sviluppati dalle insegnanti nelle attività successive, permettendo così di orientare i primi processi di insegnamento-apprendimento della matematica. Questi tipi di usi andrebbero poi gradatamente oggettivizzati negli anni successivi attraverso il linguaggio finendo con il costituire i referenti del lessico istituzionale.
L'ottica seguita in queste esperienze è quindi in stretta sintonia con il pensiero di Radford (1997, 2003a,b) secondo il quale la conoscenza è collegata indissolubilmente alle attività nelle quali i soggetti si impegnano e ciò deve essere considerato in stretta relazione con le istituzioni culturali del contesto sociale di volta in volta considerato. Tale pensiero certamente non può non riguardare allievi di questa età, dato che il linguaggio, la semiotica, ogni altro sviluppo a carattere espressivo del quale ci occuperemo in questo articolo, non sono che segni che esprimono attività dell'allievo che è implicato, in base alle esigenze della società e della cultura in cui vive, a manifestare le proprie azioni creative. L'obiettivo che ci siamo posti è stato quindi quello di indagare inizialmente le pratiche personali degli allievi concernenti la metà tenendo conto che, sopratutto per questo livello scolastico, le risposte non esulano quasi mai da un contesto di tipo sociale; in effetti, come sostiene Radford, la conoscenza non si produce in un rapporto

esclusivo instaurato tra l'individuo e il problema da risolvere, ma viene pensato e costruito socialmente. In tal senso, sono state proposte anche attività di "pratiche condivise" che saranno presentate in un articolo successivo.

2.2 Frazioni

I riferimenti sull'argomento *frazioni* che rientrano maggiormente in questa trattazione sono quelli che si occupano della *costruzione informale* di tale sapere derivante dalla vita reale e dall'attenzione al *linguaggio quotidiano* che rappresenta per allievi di 5 anni un tutt'uno con l'apprendimento scolastico.

La constatazione che non vi è una netta distinzione tra apprendimento scolastico ed extra-scolastico non deriva esclusivamente dall'età dell'allievo, ma anche dalla mancanza dell'influenza del contratto didattico, che comporta una vera e propria attesa sociale o una omologazione dei comportamenti richiesti agli allievi derivante dalla valutazione dei risultati degli studenti. Questo fa sì che i saperi degli allievi di questo livello scolastico si fondano maggiormente sui diversi usi nella vita di tutti i giorni dell'oggetto culturale in questione, piuttosto che su ciò che si aspettano che l'insegnante voglia da loro, anche se non bisogna dimenticare che una certa attesa affettiva e sociale è già presente (Baldisserri et al., 1993).

I riferimenti sulle frazioni più vicini a questa trattazione si possono rintracciare nella ricchissima bibliografia contenuta nel testo di Fandiño Pinilla (2005), dove vengono citati gli studi di Mack (1990, 1993) che presentano l'idea di "conoscenza informale" come quella conoscenza basata su attività spontanee della vita quotidiana effettuate per dare risposta a problemi posti nel contesto della vita reale dell'individuo. Le esperienze realizzate dall'Autore in aula dimostrano che su questa conoscenza informale possono costruirsi le idee iniziali di frazione.

Graeber e Tanenhaus (1993) propongono un approccio informale alle frazioni, per esempio dando loro un senso concreto; l'idea che viene presentata è quella di usare le frazioni come numeri per misurare grandezze, con l'obiettivo di far costruire agli studenti una conoscenza informale sul tema.

Figueras (1991) presenta una vasta rassegna sull'uso delle frazioni e dei numeri razionali nel mondo reale che può essere un utile riferimento dal punto di vista didattico.

Streefland (1990, 1991, 1993) sostiene ed esemplifica le modalità di insegnamento – apprendimento delle frazioni all'interno del mondo reale per giustificare passo passo le necessità che la vita reale pone per quanto concerne l'apprendimento e la padronanza di questo argomento.
I numerosi studi di Valdemoros (1992, 1993a,b,c; 1994a,b; 2001, 2004) dedicano particolare attenzione al linguaggio delle frazioni; in particolare l'Autore studia la costruzione del significato della frazione attraverso l'uso di diversi simboli, anche in riferimento all'uso di materiali e modelli concreti.
Bezuk e Bieck (1993) insistono sull'importanza di dominare linguisticamente il lavoro sulle frazioni nel tentativo di dare senso al suo apprendimento ed al suo uso; nel testo gli Autori propongono una breve panoramica delle ricerche in questa direzione.
Ball (1993) propone una personale esperienza di insegnamento-apprendimento in una III primaria nella quale discute con i propri allievi gli usi quotidiani delle frazioni nel linguaggio ordinario; solo dopo aver costruito una salda consapevolezza ed aver accettato rappresentazioni personali, discute con gli allievi i simbolismi opportuni, negoziandoli apertamente.
Un altro riferimento legato a questa ricerca è lo studio di Giménez (1994) che propone una distinzione tra "frazionare" nel linguaggio comune e "frazionare" in Matematica, mettendo in campo racconti, storie, provocazioni cognitive varie e sfruttando il ricorso alla storia e la discussione collettiva in aula.
Interessanti per il nostro campione di ricerca, sono gli studi concernenti reports su esperienze d'aula che relazionano su attività riguardanti il contare e il ripartire in età prescolare (Pepper, 1991; Hunting, Pepper e Gibson, 1992). In particolare, in Pepper, Hunting (1998) vengono analizzate le strategie utilizzate da bambini di scuola dell'infanzia per effettuare queste due procedure. Inoltre, va citato lo studio di Pitkethly, Hunting (1996) relativo alla formazione del concetto di frazione. In questo lavoro viene presentata una ricca e profonda panoramica di ricerche tutte unite dal comune obiettivo di aiutare i bambini a sviluppare una costruzione significativa dei numeri razionali, fondata su un duraturo concetto di frazione. In particolare, vengono citati lavori di ricerca che mettono in evidenza come i concetti iniziali di frazione emergono dall'applicazione di meccanismi intuitivi, legati soprattutto a partizioni in contesti continui e discreti.

Particolarmente legato alla nostra trattazione è inoltre lo studio condotto da Brizuela (2006) basato su interviste effettuate a 24 bambini di 5-6 anni allo scopo di indagare le tipologie di notazione spontanee da essi utilizzate per parlare di frazione, il significato attribuito a tali rappresentazioni e come esse incidono sull'apprendimento di tale concetto. Interessante è osservare che la maggioranza del testo si concentra sul concetto di metà puntando particolarmente l'attenzione sulla notazione scritta usata per esprimere questo concetto. Tali notazioni e interpretazioni rientrano nel vissuto dei bambini. In questo articolo vi è anche una ricca bibliografia legata a questo tema alla quale rimandiamo per non appesantire troppo la lettura.
Inoltre Keijzer, Terwel (2001) presentano un interessante "case study" condotto su un percorso di 30 lezioni in una scuola primaria in Olanda; lo scopo era alfabetizzare gli studenti sulle frazioni, ossia far costruire un minimo di competenze su questo tema.
Infine, riferimenti più recenti riguardanti le frazioni con ricchi suggerimenti didattici per gli insegnanti che tengono conto dei risultati di ricerca in didattica della matematica si possono rintracciare nel capitolo 7 di Llinares (2003) e nel capitolo 4 di Cid, Godino, Batanero (2003).
Questi riferimenti bibliografici sulle frazioni concernenti il contesto quotidiano e l'introduzione di questo sapere risultano strettamente correlati con l'analisi successiva.

2.3 Semiotica

Un altro aspetto del quadro teorico collegato a questa ricerca concerne la *semiotica* delle frazioni che consiste nella rappresentazione dei concetti mediante sistemi di segni. In effetti, le occorrenze dell'oggetto matematico "frazione" sono molteplici, tanto che in Fandiño Pinilla (2005) sono proposte 12 diverse interpretazioni dell'idea di frazione, e tali occorrenze rinviano ad una molteplicità di rappresentazioni semiotiche, ciascuno dei quali appartiene a diversi registri. Occorre ricordare che in matematica: «L'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» (D'Amore, 2003a); per questo, se vogliamo far riferimento ad un oggetto matematico, non possiamo far altro che scegliere un registro semiotico e *rappresentare* quel concetto in quel registro. Come hanno mostrato gli studi di Duval (1993, 1995, 1998, 2006) e D’Amore (2001a,b; 2003a,b), la gestione degli aspetti semiotici del discorso matematico è dunque di fondamentale importanza ed è caratterizzata da 3 operazioni fondamentali:

- la scelta dei *tratti distintivi* che del concetto vogliamo evidenziare; questa scelta è fondamentale per la decisione circa il registro semiotico da scegliere;
- il *trattamento,* ossia il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un’altra nello stesso registro semiotico;
- la *conversione,* ossia il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un’altra in un altro registro semiotico.

Secondo D’Amore proprio l’unione di queste tre “azioni” su un concetto rappresenta la «costruzione della conoscenza in matematica» (D’Amore, 2001a, p. 164). Risulta quindi necessario, per la costruzione di apprendimento matematico, passare attraverso la consapevolezza ed il dominio delle tre componenti della semiotica (D’Amore, 2003b) che sono considerate oggi come traguardi espliciti del processo di insegnamento-apprendimento e che sono stati inseriti da D’Amore (2005) tra le “pratiche trasversali”, essendo esterne ad ogni pratica e specifiche della gestione complessiva dell’insegnamento-apprendimento della matematica.

Nel parlare di semiotica occorre però tener presente che potrebbero verificarsi le conseguenze del paradosso di Duval (1993), secondo le quali si rischia che lo studente non arrivi alla noetica (apprendimento concettuale), ma si fermi alla gestione semiotica. Questo potrebbe accadere quando l’insegnante fa gestire all’allievo un eccesso di rappresentazioni semiotiche dello stesso concetto, oppure quando non fornisce una sufficiente varietà di rappresentazioni: «Senza dubbio, l’uso di diverse rappresentazioni e la sua progressiva articolazione arricchisce il significato, la conoscenza, la comprensione dell’oggetto, ma anche la sua complessità. L’oggetto matematico si presenta, in un certo senso, come unico, ma, in un altro senso, come molteplice» (D’Amore, 2006).

La situazione paradossale sopra ricordata, fa sì che occorre prestare molta attenzione dal punto di vista didattico a questo argomento, analizzando in profondità le convinzioni degli studenti, i tratti distintivi da loro scelti, le motivazioni alla base di queste scelte, il senso che attribuiscono a tali rappresentazioni, i diversi registri semiotici e le diverse rappresentazioni proposte. In effetti, lo studente non impara autonomamente a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a gestire i diversi registri, a convertire, ma questo apprendimento deve essere necessariamente il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l'insegnante mette in evidenza la struttura semiotica di ogni registro scelto e chiama ad essere corresponsabile lo studente, con la consapevolezza delle difficoltà che gli allievi potrebbero incontrare. Eppure, come sostiene D'Amore (2001a): «L'insegnante potrebbe non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa di una supposta identità tra semiotica e noetica (identità che è molto diffusa nel pensiero degli insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua)».

3. Domande di ricerca

Riportiamo di seguito le domande di ricerca che ci hanno spinto ad affrontare questa analisi.

D1. Bambini di 5 anni possiedono convinzioni personali sul concetto di metà? Se sì, tali convinzioni vertono sull'interpretazione parte-tutto basata sull'"uguaglianza" delle parti intesa come congruenza o in modo più vario?

D2. Le rappresentazioni semiotiche che gli allievi di questo livello scolastico forniscono per tale sapere richiamano principalmente situazioni reali o situazioni astratte, come figure geometriche?

D3. Allievi di 5 anni sono capaci di riconoscere lo stesso messaggio veicolato da rappresentazioni semiotiche figurali diverse per il concetto di metà, che rappresenta in questa fase un termine già menzionato in precedenza, dato che è stato usato per rispondere alle prime due domande di ricerca? Come interpretano le rappresentazioni semiotiche mostrate?

D4. I bambini che riconoscono lo stesso messaggio veicolato da rappresentazioni semiotiche figurali diverse, considerano tali rappresentazioni come interscambiabili per parlare di metà oppure le reputano diverse?

4. Ipotesi di risposta alle domande di ricerca

Le ipotesi iniziali relative alle domande di ricerca erano le seguenti:

I1. A nostro parere, bambini di 5 anni possiedono numerose convinzioni personali relative al concetto di metà, anche perché ricerche precedenti avevano messo in evidenza tale aspetto (Brizuela, 2006). Ipotizziamo

che l’interpretazione di tale concetto che emerge con predominanza in questo livello scolastico sia legata alla “parte di un tutto” derivante da esperienze vissute. In questa interpretazione, ipotizziamo che non sia così forte e vincolante l’esigenza che le parti siano congruenti; richiesta che è invece spesso “imposta” nella scuola primaria tramite la definizione univoca presente nei libri di testo.
I2. Data l’età degli allievi coinvolti in questa ricerca, ipotizziamo che le rappresentazioni semiotiche scelte facciano parte principalmente del loro vissuto, coinvolgendo particolari situazioni problematiche più che singoli “oggetti”. Tali situazioni pensiamo siano arricchite da un contesto narrativo e affettivo. Ipotizziamo inoltre che gli oggetti menzionati siano soprattutto “reali” più che “astratti” e che quindi la situazione vincoli fortemente il concetto di metà coinvolto.
I3. A nostro parere la grande maggioranza degli allievi di questo livello scolastico è capace di riconoscere lo stesso messaggio veicolato da rappresentazioni semiotiche diverse per il concetto di metà, che a questo punto dell’intervista sarà un termine già citato dal ricercatore per rispondere alle prime due domande di ricerca. Riteniamo inoltre che, pur riconoscendo lo stesso messaggio veicolato, i bambini non si accontentano di riconoscere tale concetto, ma interpretano in modo differente ogni singola rappresentazione riferendosi a possibili situazioni reali che possono essere adeguate a descriverla, dando particolare rilievo a fattori percettivi del disegno come: colore, forma, grandezza, …
I4. Riteniamo che anche i bambini che riconoscono lo stesso messaggio veicolato dalle diverse rappresentazioni semiotiche figurali, non considerano tali rappresentazioni come interscambiabili e neutre. A nostro parere, allievi di questa età individuano, per ciascuna rappresentazione, differenze, vantaggi, svantaggi che incidono in modo diverso sull’interpretazione e sul significato ad esse attribuito.

5. Attività di pratiche personali e relativa metodologia

Le attività di pratiche personali proposte ai bambini di scuola dell’infanzia sono state divise in due gruppi. Di seguito sarà descritto per ciascun gruppo la metodologia adottata e la descrizione delle attività.

1. Inizialmente sono state poste cinque domande a ciascuno dei 42 bambini di 5 anni, in modo individuale; le interviste sono state condotte dall’insegnante in assenza degli altri compagni in un’aula diversa dalla

sezione usuale. Abbiamo scelto di far eseguire l'intervista dall'insegnante tenendo conto che, per questo particolare livello scolastico, non incide in modo vincolante il contratto didattico instaurato in classe, non essendoci valutazione dei risultati; anzi, per i nostri fini, la presenza di una figura conosciuta poteva spingere i bambini ad andare più in profondità sulle considerazioni inerenti questo argomento che non era mai stato affrontato precedentemente in modo esplicito.
Le cinque domande sono le seguenti, modificate eventualmente nella forma ma non nella sostanza in base alle esigenze delle insegnanti e allo sviluppo del dialogo:
1) Che cos'è per te la *metà*?
2) Come fai a farla capire ad un tuo compagno?
3) Perché hai fatto questa scelta? Oppure: Perché hai scelto di parlare di … citando l'oggetto scelto dal bambino)?
4) Del racconto che hai fatto sulla metà, che cosa è assolutamente necessario dire? E che cosa puoi invece non dire?
5) Esistono secondo te altre situazioni oltre a … (quella citata dall'allievo) dove si può parlare di metà? Quali?
Queste domande sono state poste allo scopo di indagare le convinzioni personali dei bambini relative al concetto di *metà*; il loro rapporto personale con questo sapere; le situazione nelle quali scelgono di collocarsi per parlare di questo oggetto; il tipo di aspetto a cui danno maggiore importanza nella situazione scelta: affettivo, cognitivo, narrativo; le rappresentazioni semiotiche scelte dagli allievi; i tratti distintivi delle rappresentazioni sui quali concentrano l'attenzione; …
Considerato il notevole quantitativo di domande poste, eravamo inoltre consapevoli fin dall'inizio che diversi allievi ad un certo punto non si sarebbero resi più disponibili a proseguire con l'intervista, ma noi abbiamo ritenuto importante porre le domande agli stessi bambini per analizzare anche la coerenza delle risposte di coloro che sceglievano di continuare la discussione.
Le risposte alle domande potevano essere fornite dai bambini in un qualsiasi registro semiotico: proposizionale, figurale, pittorico, miste (parole e disegni), ...

2. Successivamente sono state proposte dall'insegnante a ciascun allievo in modo individuale 5 rappresentazioni nel registro semiotico figurale che veicolano tutte il concetto di metà: il disegno di un quadrato dove

era colorata metà estensione, il disegno di un segmento dove era colorata metà lunghezza, un modello di cubo di cartoncino dove era colorato metà spazio, altre due rappresentazioni più legate al mondo reale, come "metà" cioccolata, "metà" di un piatto, … Le rappresentazioni potevano variare in base all'esigenza dell'insegnante, ma erano tutte scelte nel contesto continuo per non aumentare le variabili in gioco.
Inizialmente le rappresentazioni venivano consegnate una alla volta ponendo domande del tipo:
- Che cosa è questo secondo te?
- Che cosa vorrà dire?
- Chi l'ha fatto, che messaggio voleva dare?

Questa attività è stata pensata per analizzare come i bambini interpretano diverse rappresentazioni che veicolano lo stesso concetto e come queste considerazioni possono variare a seconda della specifica rappresentazione proposta.
Successivamente, venivano disposte tutte le rappresentazioni sul tavolo e si chiedeva di confrontarle, ponendo domande del tipo:
- Secondo te, queste 5 rappresentazioni vogliono dire la stessa cosa? Che cosa?
- Qual è la migliore per capire?
- Quale useresti tu?
- È meglio una di queste o quella che avevi inventato tu all'inizio? Perché?

Queste domande sono state poste allo scopo di indagare se gli allievi sono capaci di riconoscere lo stesso messaggio veicolato da rappresentazioni diverse e se queste venivano considerate come equisignificanti ed interscambiabili oppure in modo sostanzialmente diverso. La tipologia della ricerca seguita in questa fase sfrutta il lavoro di D'Amore (1998).
Questa attività è stata proposta a 30 allievi di 5 anni che avevano già effettuato l'esperienza precedente e che si sono dichiarati disponibili a continuare l'intervista.

6. Risultati ottenuti dalle attività di pratiche personali

Presentiamo di seguito una sintesi dei risultati ottenuti dalle attività di pratiche personali.

6.1 Risultati della prima attività

I risultati della prima attività sono riportati di seguito, suddivisi in base alle domande poste agli allievi. Nell'analizzare le risposte sono state create categorie che non vanno interpretate rigidamente, dato che varie affermazioni rientrano in più tipologie. Le risposte sono state infatti inserite nelle categorie che sono parse dalle interviste più evidenti. Ricordiamo che questa fase è stata proposta a 42 bambini di 5 anni.

1) Che cos'è per te la metà?

Le risposte fornite alla prima domanda della prima attività sono molto varie e possono essere così sintetizzate:

Azione di spezzare o pezzi ottenuti dalla suddivisione non necessariamente due e congruenti

- 13 bambini rientrano in questa categoria. Di questi, alcuni puntano l'attenzione esclusivamente all'*azione del dividere*: «Vuol dire tagliare le polpette» (Giuliano); altri ai *pezzi* che si individuano dalla suddivisione ma *senza esplicitare il numero necessario per ottenere una metà:* «Una caramella a pezzetti» (Matteo) [La convinzione della molteplicità dei pezzi nel parlare di metà è messa bene in evidenza nel disegno di Cristina (Allegato, fig. 1)]; altri ancora *alla parola metà come sinonimo di "pezzo"* indipendentemente dalle parti che si ottengono: «C'è un quadrato piccolo e lo spezzi a 5 metà con le forbici» (Elisa). Queste interpretazioni della metà sembrano essere legate all'origine del termine "frazione" che deriva dal tardo latino "fractio", cioè "parte ottenuta spezzando", dunque dal verbo "frangere", cioè "spezzare". [In Ball (1993) viene messo in evidenza che i bambini di questo livello scolastico tendono a chiamare tutte le frazioni come "metà" indipendentemente dal fatto che lo siano].

Dividere in due parti non necessariamente congruenti

- 12 bambini mettono in evidenza l'importanza di ottenere *due pezzi* dalla suddivisione per ottenere la metà, ma *senza dare rilievo alla congruenza* delle parti secondo una qualche caratteristica matematica, se non quella numerica: «È la parte della terra dove è giorno o quella dove è notte» (Giulia) (Allegato, fig. 2); «Dividere un giocattolo, cioè che uno prende un gioco con le costruzioni, uno ci costruisce la torre, l'altro un uomo» (Matteo). (Della frazione come "pezzo" parla Mack nel suo articolo del 1990).

Dividere in due parti congruenti
- 13 bambini danno importanza alla equivalenza delle due parti intesa come *congruenza.* In particolare, 4 la esplicitano*:* «Un bambino ha due parti uguali» (Agustina) (Allegato, fig. 3); mentre 9 la contemplano indirettamente nella *scelta degli oggetti* che si prestano ad essere divisi in questo modo e lo mostrano nel disegno (tutti gli oggetti rappresentati in questa categoria sono stati divisi cercando di individuare un ideale "asse di simmetria"): «Una metà di una mela» (Davide) (Allegato, fig. 4).

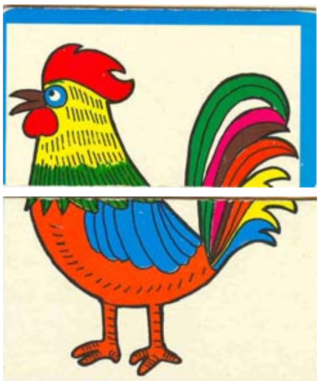
Discreto
- Solo in 2 casi la situazione scelta dagli allievi coinvolge con certezza il *discreto*: «A scuola alcuni bambini giocano e altri lavorano. Lo stesso numero di bambini che gioca o lavora» (Elisa) (Allegato, fig. 5).

Linea di separazione
- Per 2 bambini la metà è concepita come la *linea di separazione per ottenere due parti*: «Vuol dire un pezzo di qua e uno di là, in mezzo c'è la metà» (Mattia). [In Brizuela (2006) viene dato particolare rilievo alla linea di separazione per evidenziare la metà].

Complessivamente si sono ottenute 32 riposte che rientrano con certezza nel continuo, 2 nel discreto, 2 come linea di separazione e 6 che possono rientrare sia nel contesto discreto che continuo perché coinvolgono solamente l'azione del dividere senza citare l'oggetto della situazione: «Devi dividere qualcosa con qualcuno» (Andrea); «Vuol dire fare un po' per uno» (Giulia). [Della differenza fra i contesti continui e discreti parlano esplicitamente Pitkethly, Hunting (1996), riportando ricerche specifiche in questi campi].
Si nota quindi che la grande maggioranza delle affermazioni dei bambini verte su situazioni che hanno come oggetti del discorso, entità *continue,* inseriti all'interno dell'*interpretazione della frazione concepita come parte di un tutto o alla suddivisione.*
Un aspetto importante da osservare è che in tutte le risposte si nota la *presenza di un contesto affettivo* che in certe situazioni prende il sopravvento rispetto all'aspetto numerico dei pezzi, come nel caso di Cristina: «Mangiare un crescia che fa nonna che dopo spezza con il coltello e che lo mangio io con Caterina, babbo e mamma». In questa situazione affettivamente coinvolgente, Cristina non vuole dividere il numero di componenti della propria famiglia, anche se alla domanda

numero 3 risponde affermando che per parlare di metà si devono considerare solo due pezzi. Si nota quindi una mancanza di coerenza sull'idea di metà derivante dalla narrazione di situazioni differenti, soprattutto dal punto di vista affettivo, che vincola l'interpretazione che viene fornita per tale concetto.
Molte delle situazioni scelte derivano quindi dal vissuto personale, che richiama in alcuni casi il *linguaggio quotidiano* inerente le frazioni come nel caso di Leonardo: «Allora ci penso… che arriva il formaggiaio e chiede se vuole il formaggio e nonna ne compra *mezza forma*» (Allegato, fig. 6).

L'esigenza della congruenza delle parti
Come abbiamo osservano dalle risposte alla prima domanda, 12 bambini di 5 anni reputano fondamentale per parlare di metà che "le parti" siano due, ma non considerano necessario che abbiano altre caratteristiche in comune come la lunghezza, l'estensione, il volume, …. Tali convinzioni potrebbero essere state influenzate in alcuni casi dalle convinzioni iniziali delle insegnanti stesse. In effetti, alla seguente risposta di un bambina relativa alla domanda su che cos'è la metà: «Come ha fatto Aurora prima che ha spezzato il cerchietto dei capelli a metà» (Genny) (le parti non erano congruenti), l'insegnante commenta: «Io prima pensavo che avesse ragione Genny, queste sono due metà, che cosa importa se una è più grande e una è più piccola». L'interpretazione data inizialmente da questa insegnante di scuola dell'infanzia del concetto di metà risulta essere legata al significato etimologico del termine "frazionare", che considera metà una delle due qualsiasi parti che si ottengono da una suddivisione, indipendentemente dall'esigenza di soddisfare una qualche caratteristica matematica. A sostegno della propria iniziale convinzione, l'insegnante ha poi affermato che in sezione è presente un gioco in commercio, chiamato "la tombola delle frazioni", dove la metà è concepita come una delle due qualsiasi parti che formano un oggetto. Ad esempio, le due tessere della tombola che rappresentano le due metà di un gallo sono quelle rappresentate a fianco.



Sarà in effetti proprio Genny a richiamare il gioco, rappresentando per la metà parti di

oggetti tra le quali anche la testa di un gallo (Allegato, fig. 7); ma non è la sola: Giacomo disegna "metà" ruspa, ma poi afferma: «Intanto che c'ero l'ho disegnata quasi tutta» (Allegato, fig. 8). L'interpretazione data dall'insegnante del concetto di metà, dopo lo studio personale e collettivo, è diventata più varia e profonda, quindi in grado di accettare i diversi significati e usi attribuiti dagli allievi a questo sapere.
Sembra quindi che la scelta univoca di concepire il *"frazionare come una divisione in parti uguali"*, intese come congruenti, diventi radicata a partire dalla definizione e dalle proposte fornite dagli insegnanti di scuola primaria.
Eppure, come è evidenziato in Fandiño Pinilla (2005), l'usuale definizione di frazione che viene proposta nei sussidiari e nei libri di testo, non è minimamente adeguata a fungere da supporto concettuale alle successive interpretazioni che della frazione vengono offerte (implicitamente) agli studenti e poi richieste (esplicitamente). Non solo, ma l'aggettivo "uguale", che sembra essere il cardine di tale definizione, dà luogo più ad equivoci e malintesi, dunque a misconcezioni, che non a certezze (Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2006), dato che vincola fortemente le convinzioni dell'allievo relative all'interpretazione delle frazioni senza consentire che tale concetto possa rispettare altri possibili attributi come ad esempio la lunghezza, l'estensione, il volume.

2) ***Come fai a farla capire ad un tuo compagno?***
37 bambini su 42 accettano di rispondere a questa domanda richiamando le tipologie già emerse nella prima e citando nella maggior parte dei casi lo stesso "oggetto" del discorso; ciò che cambia è invece un maggiore risalto che gli allievi danno agli aspetti che reputano fondamentali per far capire questo concetto agli altri. In particolare:
- 23 bambini danno importanza a caratteristiche già emerse nella domanda precedente: all'*azione del frazionare* dando più o meno risalto all'oggetto in gioco e al numero o congruenza delle parti; all'*oggetto da dividere*, che condiziona la possibilità di ottenere operativamente la metà; alla *posizione* che devono assumere le parti; alla *distribuzione* equa di oggetti.

- 14 bambini danno importanza ad elementi nuovi necessari per farsi capire da un compagno. Di questi:
    - 4 parlano in modo esplicito dello *strumento* che sceglierebbero per *tagliare* e che risulta per loro decisivo per capire il concetto di metà:

«Prendo un coltello e faccio tante fette, ciascuna è metà!» (Cristina); «Con le forbici» (Cecilia) (prende un foglio di carta e lo divide secondo un asse di simmetria). Da questi esempi si nota come l'azione concreta risulti fondamentale per bambini di questa età per far comprendere un concetto;

- 9 parlano del *disegno* come strategia adatta a far cogliere il concetto di metà mostrando la varietà di tipologie emerse nella prima domanda: «Gliela disegno e ci faccio una riga» (Noemi); «Lo disegno e una metà la coloro di un colore e l'altra metà di un altro» (Agustina) (solo questa allieva cita esplicitamente il colore come aiuto per farsi capire, pur essendo usato anche da altri allievi).

La scelta del disegno come strategia adatta per far capire il concetto di metà mette in evidenza come questo strumento sia una prassi consolidata per questo livello scolastico che a volte può addirittura essere interpretata come clausola del contratto didattico del tipo: «L'insegnante pretende sempre una risposta disegnata che deve avere la prevalenza su altre forme di risposta di verifiche», così come rilevarono Baldisserri et al. (1993).

- 1 allievo sceglie il *linguaggio* come metodologia più appropriata per spiegare il concetto di metà: «Gli dico che è una cosa tagliata in due con le parole» (Elian), mettendo così in evidenza come il linguaggio rappresenti per allievi di questa età un registro semiotico difficile da essere dominato e compreso.

Per quanto riguarda la scelta di oggetti continui o discreti:

- 25 bambini su 37 parlano di situazioni rientranti nel continuo; all'interno di questa categoria vi sono tutti coloro che citano strumenti per tagliare, il disegno e l'azione dello spezzare;
- 7 allievi citano un contesto discreto, quindi in numero maggiore rispetto alla domanda precedente. Di questi 7, 5 nella domanda precedente avevano dato risposte di tipo generico, mentre ora mettono in evidenza la distribuzione di oggetti menzionandoli nel dettaglio: costruzioni, figurine, caramelle, carte: «Prendo le carte: una a lei e una a me» (Giulia), mentre 2 prima avevano citato situazioni nel continuo e ora nel discreto;
- i rimanenti 5 allievi forniscono risposte dove non risulta chiaro il contesto discreto o continuo.

3) ***Perché hai fatto questa scelta? Oppure: Perché hai scelto di parlare di… citando l'oggetto scelto dal bambino)?***

A questa domanda rispondono 35 bambini sui 42 iniziali nel seguente modo:

- 21 legano la scelta a *fattori endogeni* collegati all'affettività, al gusto, al piacere e al vissuto personale, mostrando come questi aspetti risultino fondamentali per allievi di questa età. In particolare:
  - 16 concentrano l'attenzione sul *gusto e piacere personale:* «Perché mi piace tanto giocare con Alessandro. Sono una sua amica, ma ci posso giocare solo per metà e poi ci giocano gli altri. Io gli voglio tanto bene» (Ludovica); «Perché mi piacciono le polpette» (Giuliano);
  - 5 motivano la scelta in base all'*esperienza personale vissuta:* «Le carte, le case, le costruzioni, i fogli. Li ho scelti perché lo faccio sempre» (Stefano); «Perché su da nonna l'ho visto tante volte» (Leonardo);
- 9 forniscono motivazioni legate a *fattori esogeni*:
  - 6 alla scelta dell'*oggetto facilmente divisibile o disegnabile:* «Perché si può disegnare» (Genny); «Perché non c'è un'altra cosa che si spezza così» (Thomas);
  - 3 a *caratteristiche dell'oggetto non attinenti il concetto di frazione:* «Perché il pane fa bene» (Nicoletta); «Perché si può mangiare» (Kristian);
- 5 rispondono *senza dare una giustificazione attinente l'argomento:* «Perché mi è venuto in mente» (Francesco F.);

4) Del racconto che hai fatto sulla metà, che cosa è assolutamente necessario dire? E che cosa puoi invece non dire?

A questa domanda rispondono 25 allievi sui 42 iniziali, gli altri scelgono spontaneamente di cambiare attività.

- 15 su 25 mettono in evidenza *solo gli aspetti che a loro parere risultano necessari* per parlare di metà mentre sorvolano sugli aspetti da sostituire o eliminare. Gli aspetti ritenuti fondamentali per far capire il concetto di metà rientrano tra le categorie delle risposte alle domande precedenti: azione del tagliare, disegnare una linea, ... Solo un bambino aggiunge tra le tipologie l'importanza che gli oggetti siano in *numero pari:* «Deve essere pari» (Luca) ed è un allievo che ha sempre scelto con coerenza il contesto discreto.

- 6 esprimono in modo molto pertinente e significativo *sia ciò che reputano indispensabile dire sia ciò che può essere sostituito* in riferimento al contesto scelto: «Bisogna sempre dire che tagliamo in mezzo, si può non dire che sulla terra ci sono gli uomini» (Giulia). [Giulia alla prima domanda aveva affermato: «È la parte della terra dove è giorno o quella dove è notte» (Allegato, fig. 2)]; «Le due parti sono sempre uguali e non è importante dire di che colore è la mela» (Davide); «Bisogna dire che sono due parti e che sono uguali, invece della mela può essere una pera, un'arancia…» (Kristian).

Interessante è osservare che 5 dei 6 allievi capaci di evidenziare anche ciò che non caratterizza il concetto di metà, nella prima domanda rientravano nella categoria del *Dividere in due parti congruenti* e avevano tutti considerato oggetti continui. Il sesto allievo invece rientrava nella tipologia del discreto: «A scuola alcuni bambini giocano e altri lavorano. Lo stesso numero di bambini che gioca o lavora» e in questa domanda afferma. «Bisogna dire che sono lo stesso numero, non è importante dire se sono maschi o femmine» (Elisa).

Si nota una certa coerenza di atteggiamento nel rispondere alle varie domande che è presente nella quasi totalità degli allievi.

- 4 bambini esplicitano il *loro disagio* nello stabilire che cosa risulta non fondamentale per esprimere il concetto di metà: «È stata tagliata col coltello a metà e ha fatto due parti uguali, non lo so cosa si può non dire» (Lucia).

I risultati mostrano come sia più semplice per allievi di questa età stabilire che cosa è fondamentale dire su un concetto rispetto a ciò che è sostituibile.

5) Esistono secondo te altre situazioni oltre a … (quella citata dall'allievo) dove si può parlare di metà? Quali?

20 allievi su 42 accettano di continuare a rispondere alle domande. Dalle affermazioni emergono competenze dei bambini nel sapere individuare numerosi oggetti continui facilmente divisibili concretamente o raccolte di oggetti rientranti nel contesto discreto diversi da quelli individuati nelle domande precedenti:

- 15 allievi propongono un *elenco di oggetti* da dividere. Nell'elenco, in 7 casi sono citati solo oggetti continui, mentre in 8 casi vi è almeno anche una situazione che richiama il discreto come la divisione legata al

loro vissuto di giochi, colori, fogli, caramelle, figurine, spaghetti: «La scala, le caramelle come fai te maestra, un albero. Poi anche i fogli, i colori» (Elian).
Interessante è stata la domanda posta dall'insegnante ad Elian, allo scopo di indagare l'importanza data dall'allievo alla congruenza delle parti: «Come taglieresti gli alberi per ottenere la metà?».
Elian risponde: «In tutti e due i modi si possono tagliare, ma così (fa un segno in verticale con la mano individuando un ipotetico piano di simmetria dell'albero) è difficile perché c'è da arrampicarsi sopra gli alberi». In questa risposta si nota il sopravvento del contesto reale sull'aspetto astratto; in effetti per molti allievi di questo livello scolastico individuare la metà risulta essere un problema pratico. Da questo punto di vista, Fandiño (2005) rivela come didatticamente sia consueto per le frazioni proporre o far immaginare oggetti concreti come una pizza, una torta, caramelle, che però vanno considerati come astratti. Ma spesso gli allievi ai quali la proposta è stata fatta in situazione reale a questa fanno riferimento: una pizza ricoperta di ingredienti, caramelle di gusti, marche, consistenze diverse, difficilmente possono essere divise in parti "uguali"; l'analogo avviene per l'albero di Elian, per il quale è veramente improbabile che nella realtà vi sia un piano di simmetria.

- 3 allievi esplicitano in modo minuzioso *situazioni alternative* a quella scelta inizialmente dalle quali emerge il concetto di metà. 2 di queste situazioni rientrano nel contesto continuo, mentre una allieva che in precedenza aveva citato una situazione nel continuo ora cita il discreto: «Le squadre dei bambini nel gioco del fazzoletto» (Agustina) (Allegato, fig. 9).

- 1 allieva rimane *vincolata ad un unico contesto,* quello dei frutti, e si dichiara incapace di trovarne altri dove si possa parlare di metà. Alla prima domanda risponde: «Una mela si taglia in due parti uguali e ne prendo solo una»; a questa domanda afferma: «La banana. Se non sono frutti non mi viene in mente niente» (Lucia).

- 1 allieva *dichiara la propria difficoltà* a trovare altre situazioni.

Quasi tutti i bambini hanno chiesto anche di poter rappresentare le situazioni, fornendo un'enorme ricchezza di disegni che in alcuni casi rispecchiano le affermazioni, in altri risultano più o meno ricchi di particolari o di ulteriori oggetti da dividere (Allegato, fig. 10a,b).

6.2 Risultati della seconda attività

Riportiamo di seguito i risultati della seconda attività divisi per fasi.

Prima fase. Nella prima parte della seconda attività realizzata con 30 bambini e basata sull'interpretazione delle rappresentazioni semiotiche figurali consegnate dalle insegnanti una alla volta ai singoli bambini e tutte veicolanti il concetto di metà, gli allievi rispondono nel seguente modo:

Riconoscono la metà in tutte
- 13 *parlano esplicitamente di metà* per ogni rappresentazione semiotica, descrivendo possibili situazioni riguardanti quell'"oggetto", rapporti affettivi con il sapere in gioco e caratteristiche percettive dello specifico disegno: «È un quadrato come un dado, è di 2 colori: giallo e verde perché è metà» (Genny); «La cioccolata è buona, è marrone, è mezza perché parliamo del mezzo» (Genny).

Non riconoscono la metà
- 12 bambini *non citano il concetto di metà* già incontrato nella prima attività per nessuna rappresentazione, pur esplicitando per ciascuna la descrizione di una situazione che può caratterizzarla. Tali situazioni sono spesso legate al loro vissuto o all'aspetto esclusivamente percettivo basato sull'osservazione del disegno e non sul senso che può veicolare: «È un cerchio rotondo, c'è la riga… qua c'è bianco, qua c'è rosso, sembra un segnale. Cosa l'hai fatto col righello?» (Chiara); «Mi fa pensare al libro grande che abbiamo fatto per il teatro l'anno scorso» (Elisa).

Riconoscono la metà solo per alcune rappresentazioni
- 5 *parlano di metà solo per alcune rappresentazioni*, mentre per altre citano il contesto "reale", mettendo in evidenza come, a seconda della rappresentazione scelta, le considerazioni possono variare: «È un quadrato, anzi è il quadrato del gioco dell'oca. Hai sbagliato, maestra, a non farci i numeri. Mi sembra che un coltello l'ha tagliato a metà!» (Francesco F.); «È una torta, è buona, a destra è gialla, a sinistra è bianca. Maestra, ci potevi disegnare le candeline. Per me non l'hai colorata bene» (Francesco F.).

Come si nota da questa prima fase, circa la metà degli allievi non da risalto allo stesso messaggio veicolato dalle diverse rappresentazioni, ossia al loro possibile comune significato, ma alla descrizione di situazioni reali che richiama alla mente ogni specifica rappresentazione, all’uso che ne può derivare, all’osservazione di fattori percettivi come colori e forme del disegno,… Questo avviene nella maggior parte dei casi per le rappresentazioni che richiamano maggiormente il mondo circostante.

Seconda fase. Alla domanda se le 5 rappresentazioni semiotiche figurali posizionate contemporaneamente sul tavolo vogliono dire la stessa cosa e che cosa, i bambini rispondono nel seguente modo:

Veicolano il concetto di metà

- 17 affermano che il messaggio veicolato in tutte le rappresentazioni è il *concetto di metà:* «I disegni ci volevano far giocare alla metà» (Giulia).

Interpretazioni diverse

- 6 affermano che le 5 rappresentazioni *non vogliono dire la stessa cosa* e la motivazione è basata principalmente sul fatto che *sono diverse come forma, ossia in generale come rappresentazioni:* «Per me non ci vogliono dire la stessa cosa, perché un disegno è lungo, un altro è rotondo, un altro è quadrato e un altro ancora mi sembra un cubo» (Elisa).

Conclusioni inaspettate

- 3 giungono a *conclusioni diverse* da quella attesa dai ricercatori ma plausibile: «Sì, mi vogliono far capire che le forme sono diverse» (Giorgia).

Non attinenti al concetto di metà

- 4 *forniscono risposte non attinenti al concetto di metà:* «Le hai colorate così, perché si era finito il colore?» (Teresa).

Gli allievi, pur notando nella maggioranza dei casi che le rappresentazioni veicolano lo stesso messaggio, non le considerano interscambiabili o equivalenti, ma per ciascuna esplicitano differenze, bellezza, vantaggi, svantaggi e preferenze: «La più brutta è la striscia perché c’ha lo scotch, per aggiustarla perché si era rotta» (Genny); «Mi piace di più il cubo, perché è colorato di celeste una metà e, poi, perché ha i colori messi bene. Il cubo mi sembra un binocolo che fa vedere il mare! Il più brutto è il cerchio nero» (Elisa).
Alla domanda: “Qual è la migliore per capire?”, tutti gli allievi scelgono una particolare rappresentazione; nessuno sostiene che è la stessa cosa usare indifferentemente una rappresentazione o l’altra per parlare di

metà. La motivazione della scelta si basa a volte sulla chiarezza di significato del messaggio veicolato dalla rappresentazione, altre volte sul gusto personale legato a giudizi estetici che per gli allievi condizionano la possibilità di capire meglio un messaggio [nelle interviste effettuate da Empson (1999) si mette in evidenza come i bambini di questo livello scolastico puntino l'attenzione su fatti estetici concernenti le parti delle frazioni]. Dai risultati emerge che se la scelta è basata sulla preferenza della rappresentazione legata al piacere personale, i bambini scelgono le rappresentazioni che ricordano maggiormente la vita reale: «La cioccolata è la più bella perché è spezzata» (Aurora); ma quando la motivazione della scelta è legata al capire meglio il messaggio, la maggioranza degli allievi sceglie tra le rappresentazioni consegnante dall'insegnante, quelle maggiormente geometriche: «Il cerchio e la riga fanno capire meglio perché sono fatte bene» (Chiara).

Infine, alle domande: "Quale useresti tu?"; "È meglio una di queste o quella che avevi inventato tu all'inizio? Perché?", gli allievi rispondono nel seguente modo:

- 13 *scelgono la propria rappresentazione* con la motivazione che si capisce meglio o è più bella esteticamente o più significativa per il loro vissuto: «È più chiaro quello che ho fatto io perché la mamma ha spezzato 2 pezzi di uova di Pasqua per me e per Alena» (Thomas) (Allegato, fig. 11); «Quelli che ho disegnato io sono meglio, perché sono più belli» (Noemi). [In Brizuela (2006) vengono riportati diversi studi che mettono in evidenza l'importanza di integrare l'analisi delle rappresentazioni spontanee con gli studi effettuati sulla comprensione e l'apprendimento delle frazioni. Da questo punto di vista Sáenz-Ludlow (1995) afferma: «inizialmente, potrebbe essere necessario accettare le rappresentazioni informale dei bambini come notazioni transitive prima di negoziare con loro notazioni convenzionali», tra queste riconosce anche l'importanza del linguaggio naturale per verbalizzare le attività mentali dei bambini necessarie come primo step verso la simbolizzazione].

- 17 scelgono le *rappresentazioni dell'insegnante* fornendo una grande varietà di motivazioni: precisione, bellezza, chiarezza, …; di questi bambini alcuni fanno una scelta specifica di una particolare rappresentazione, altri individuano una caratteristica comune a tutte: «Io userei il cerchio perché è fatto bene diritto, il cerchio è bello, le 2 metà

sono uguali» (Chiara); «Quello della maestra perché sono proprio a metà» (Aurora); «Mi piacciono di più questi disegni, perché sono forme geometriche: quadrato, rotondo, triangolo, rettangolo ...» (Francesco F.).
Dai risultati emerge che tutti gli allievi valutano per ciascuna rappresentazione caratteristiche, pregi e difetti e compiono scelte specifiche per la comprensione, pur riconoscendo in molti casi lo stesso messaggio veicolato.

7. Risposte alle domande di ricerca

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca.
R1. Bambini di 5 anni possiedono già numerose convinzioni personali sul concetto di metà. Tali convinzioni vertono nella grande maggioranza dei casi *sull'interpretazione parte-tutto* inerente *oggetti* principalmente *continui*. Pur essendo l'interpretazione delle frazioni considerata dai bambini prevalentemente come "parte di un tutto", risulta essere molto più varia, dal punto di vista delle diverse tipologie emerse per questa interpretazione, di quella "imposta" nella scuola primaria dalle proposte dei libri di testo di considerare parti esclusivamente "uguali" intese come congruenti. [Già in Brizuela (2006, p. 298) si erano messi in evidenza i diversi contesti d'uso di tale concetto emersi dalle interviste di bambini di scuola dell'infanzia: «Ci sono molti contesti nei quali i bambini hanno bisogno di considerare le frazioni»].
R2. Le rappresentazioni semiotiche che gli allievi di questo livello scolastico forniscono per tale sapere richiamano situazioni reali derivanti dal loro vissuto che rispecchiano in alcuni casi esclusivamente l'etimologia della parola "frazione", in altri il numero di parti necessarie per parlare di metà, in altri la congruenza dei pezzi, …
La varietà di rappresentazioni semiotiche prodotte dagli allievi risulta essere quindi molto ampia, anche perché deriva da convinzioni assai diverse degli allievi. Tali rappresentazioni sono nella maggior parte dei casi vere e proprie situazioni ricche di dettagli narrativi e affettivi legati al contesto reale tramite le quali il concetto assume un senso. In effetti, come sostiene D'Amore (2006): «Rispetto ad un oggetto matematico osservabile, conosciuto in base a pratiche condivise, la "descrizione reale" risponde pienamente alle caratteristiche dell'oggetto, cioè della pratica realizzata attorno ad esso o con esso, e dunque del *senso* che tutto ciò acquisisce per chi tale pratica esplica».
R3. La nostra ipotesi è stata solo parzialmente confermata. In effetti ci si

aspettava che fossero di più gli allievi in grado di riconoscere il concetto di metà veicolato da diverse rappresentazioni figurali, dato che era già stato citato in precedenza. I risultati mettono in evidenza come i fattori percettivi, affettivi e l'esigenza della narrazione prenda il sopravvento sull'aspetto maggiormente concettuale. In linea con le nostre previsioni iniziali, per ogni rappresentazione figurale viene fornita una specifica interpretazione legata a situazioni reali e vissute che possono essere adeguate a descriverla, dando particolare rilievo a fattori percettivi come: colore, forma, grandezza, … a tal punto che in molti casi questi aspetti prendono totalmente il sopravvento sul messaggio veicolato del concetto di metà.

R4. I bambini che riconoscono lo stesso messaggio veicolato dalle 5 rappresentazioni semiotiche figurali diverse non le considerano come interscambiabili ed equisignificanti, bensì assai diverse l'una dall'altra non solo per questioni percettive o legate al gusto personale o alle situazioni che le possono rispecchiare, ma anche come rappresentazioni più o meno adatte a trasferire il messaggio di metà. Ciò è in linea con i risultati di ricerche precedenti che mettono in evidenza come, anche per allievi di età maggiore rispetto a quelli di scuola dell'infanzia, la scelta del registro rappresentativo non è affatto neutra e che non tutte le scelte sono identiche per ogni studente (D'Amore, 1998), per questo sembra essere una buona strategia didattica quella di invitare gli studenti a fare pratica esplicita sulla gestione degli aspetti semiotici.

8. Conclusioni

Dalle risposte degli allievi emergono interessanti e centrate informazioni che mettono in evidenza come sia necessario partire dalle convinzioni personali degli allievi per poi strutturare significative attività successive; atteggiamento usato dagli insegnanti di scuola primaria, ma spesso sottovalutato per questo specifico argomento, che viene proposto solo in terza primaria partendo, in genere, dalle stereotipate e assai limitate proposte presenti nei libri di testo che risultano solitamente avulse dal contesto degli allievi. Le proposte vertono di solito su rigide suddivisioni di un intero in tante parti "uguali" intese come congruenti, senza cercare contesti nuovi dove la frazione può essere analizzata e approfondita nei suoi diversi aspetti, senza troppi vincoli e limitazioni.

Eppure, come attestano i risultati di questa ricerca, i bambini fin dai 5 anni hanno già numerose intuizioni sul concetto di frazione in generale e

di metà in particolare. Ciò si percepisce dalle profonde e variegate risposte degli allievi dalle quali emerge un misto di consapevolezza adulta, in parte appresa da esperienza e in parte per imitazione (i due cardini dell'apprendimento "ingenuo") (D'Amore et al., 2004). In effetti, è proprio nella scuola dell'infanzia che iniziano a formarsi modelli che si creano spontaneamente sia in base alle attività scolastiche, sia in base al contatto con la vita quotidiana fuori dalla scuola. L'importanza di prendere in considerazione l'analisi della produzione degli allievi è così sottolineata in Duval (2003): «Non si può sottolineare l'importanza delle descrizioni, nell'acquisizione delle conoscenze scientifiche così come nelle prime tappe degli apprendimenti matematici, senza affrontare un'altra questione fondamentale tanto per la ricerca come per gli insegnanti: l'analisi delle produzioni degli allievi. Giacché è nel quadro dello sviluppo della descrizione che si ottengono le produzioni più personali e le più diversificate, dato che esse possono essere fatte verbalmente o con l'aiuto di un disegno, di schemi… In questo caso si tratta, per la ricerca, di una questione metodologica e, per gli insegnanti, d'una questione di diagnostica. Vedremo che ogni analisi delle produzioni degli allievi richiede che si distingua accuratamente in ogni produzione semiotica, discorsiva o non discorsiva, *diversi livelli d'articolazione del senso*, che non rivelano le stesse operazioni».
Vista la varietà e le tipologie di situazioni proposte dagli allievi di questa età per la metà, è possibile dedurre quanto sia importante, per la costruzione del concetto di frazione, invitare i bambini a ricercare esempi di frazioni sulla base del loro vissuto e nel linguaggio quotidiano. Si tratta di mettere sempre in evidenza che la frazione è presente in modo significativo nella vita reale, per dare senso a quel che si studia, inoltre risulta importante trovare occasioni che possano facilitare la comprensione dell'equivalenza delle diverse rappresentazioni dello stesso concetto, mostrando i contesti d'uso differenti che fanno sì che rappresentazioni diverse non siano sempre interscambiabili, poiché non assumono sempre lo stesso significato (D'Amore, 2006), tenendo sempre conto di una visione pragmatica che mette al centro dell'attenzione dell'insegnante l'allievo in rapporto con il sapere in gioco.

Ringraziamenti. Un pensiero speciale va a Bruno D'Amore per le costanti letture critiche e i preziosi spunti di riflessione e alle 33 insegnanti che con tenacia e determinazione continuano tuttora ad indagare la tematica delle

frazioni.

Bibliografia

Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B., Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. *La matematica e la sua didattica.* 4, 444-449.

Ball D. (1993). Halves, pieces and twoths: costructing and using representational contexts in teaching fractions. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds). (1993). *Rational numbers: as integration of research.* Hilsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 157-195.

Bezuk N.S., Bieck M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In: In: Douglas T.O. (ed.) (1993). *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* New York: MacMillan. 118-136.

Brizuela B.M. (2006). Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Matematics*. 62, 3, 281-305.

Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. Una learning story basata su una ricerca – azione di gruppo e sua influenza sulle decisioni relative alla trasposizione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

Cid E., Godino J.D., Batanero C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Granada: Facultad de Ciencias de la Educación.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazioni e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica.* XIX, V, 3, 1, 7-29.

D'Amore B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.

D'Amore B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.

D'Amore B. (2003a). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003b). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. *La matematica e la sua didattica.* 4, 557-583.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and*

Educational Technology. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno -6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica*. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 7-36.

D'Amore B., Radford L., Bagni G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-39.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 6, 139-163.

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.

Duval R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 585-619.

Empson S.B. (1999). Using sharing situations to help children learn fractions. *Teaching Children Mathematics.* 2, 2, 110-114.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Figures O. (1991). *Fractions in realistic mathematics education.* Dordrechet: Kluwer.

Giménez J. (1994). Del fraccionamento a las fracciones. *Uno.* 1, 101-118.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 14, 3, 325-355.

Godino J.D., Batanero C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: Sierpinska A., Kilpatrick J. (eds.) (1998). *Mathematics Education as a Research*

Domain: A Search for Identity. Dordrecht: Kluwer A.P. 177-195.

Graeber A.O., Tanenhaus E. (1993). Multiplication and division: from whole numbers to rational numbers. In: Douglas T.O. (ed.) (1993). *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* New York: MacMillan. 99-117.

Hunting R.P., Pepper K.I., Gibson S.J. (1992). Preschooler's schemes for solving partitioning tasks. In: Greeslin W., Graham K. (eds.) (1992). *Proceeding of the sixteenth international conference of PME.* Durham: Università dello New Hampshire. 281-288.

Keijzer R., Terwel J. (2001). Andrey's acquisition of fractions: a case study into the learning of formal mathematics. *Educational studies in mathematics.* 47, 1, 53-73.

Llinares S. (2003). Fracciones, decimals y razon. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: Chamorro M.C. (ed.) (2003). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Pearson-Prentice Hall. 187-220.

Mack N.K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education.* 21, 1, 16-33.

Mack N.K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.). *Rational Numbers: An integration of Research.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ. 85-106.

Pepper K.L. (1991). Preschoolers knowledge of counting and sharing in discrete quantity settings'. In: Hunting R.P., Davis G. (eds.). (1991). *Recent research in psychology: early fraction learning.* New York: Springer-Verlag. 103-127.

Pepper K.L., Hunting R.P. (1998). Preschoolers' Counting and Sharing**.** *Journal for Research in Mathematics Education*. 29, 2, 164-183.

Pitkethly A., Hunting R.P. (1996). A review of research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 30, 1, 5-38.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio–Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics.* 17(1), 26–33.

Radford L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics.* 52(2), 123–150.

Radford. L. (2003b). On Culture and Mind. A post–Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M. et al. (Eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing.* 49–79, Legas, Ottawa.

Sáenz-Ludlow A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics.* 28, 101-132.
Schoenfeld A.H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*. 7, 4, 329-363.
Streefland L. (1990). *Fractions in realistic mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.
Streefland L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer.
Streefland L. (1993). Fractions: a realistic approach. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: an integration of research.* Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Ass. 289-325.
Valdemoros M. (1992). *Análisis de los resultados obtenidos a través de un examen exploratorio del "Lenguaje de las fraciones".* Mexico: Dipartimento di Matemática Educativa. Cinvestav.
Valdemoros M. (1993a). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.* Tesi di dottorato. Mexico: Dipartimento di Matemática Educativa. Cinvestav.
Valdemoros M. (1993b). The language of fractions as un active vehicle for concepts. *Proceedings of XV Annual meeting of the North American Chapter of the PME.* I, 1233-1239.
Valdemoros M. (1993c). La construcción de significados a través de distintos sistemas simbólicos. *Memorias de IV Simposio internacional sobre investigación en Matemática Educativa.* 273-284.
Valdemoros M. (1994a). Various representations of the fraction throught a case study. *Proceedings of the XIX PME.* II, 16-23.
Valdemoros M. (1994b). Fracciones, referentes concretos y vínculos referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa.* 21-30.
Valdemoros M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: studio de casos. *Educación matemática.* 13, 1, 51-67.
Valdemoros M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Relime.* 7, 3, 235-256.

Allegato

fig. 1

fig. 2

fig. 3

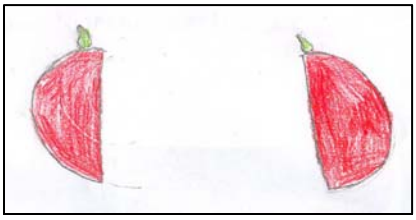


fig. 4

fig. 5

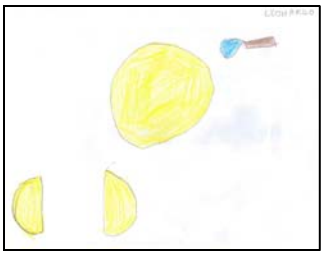


fig. 6

fig. 7

fig. 8

fig. 9

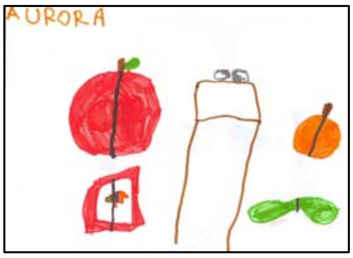


fig. 10a

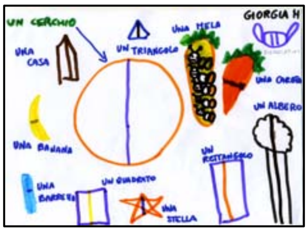


fig. 10b

fig. 11