L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 40 A-B N. 2 - MARZO -APRILE 2017

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale - D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue

CENTRO RICERCHE DIDATTICHE
UGO MORIN

NUMERO SPECIALE AIRDM

NUMERO DOPPIO

Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN - Istituti Filippin - PADERNO DEL GRAPPA

Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni

Sommario

In questa ricerca si propongono le convinzioni possedute dagli allievi alla fine della quinta primaria sul concetto di altezza di poligoni, legate a misconcezioni che dipendono anche dalle scelte didattiche effettuate dagli insegnanti riguardanti la trasposizione didattica del sapere e l'ingegneria didattica. Scelte spesso univoche e vincolanti che non tengono conto di diversi mezzi semiotici di oggettivazioni necessari per dare significato all'aspetto concettuale e culturale del sapere al quale si vuole far giungere i propri allievi.

Summary

In this research we propose the beliefs held by pupils at the end of the fifth primary on the concept of height of polygons, tied to misconceptions that also depend on the educational choices made by teachers about the didactic transposition of knowledge and educational design. Choices often unique and binding that does not take into account the different semiotic means of objectification necessary to give meaning conceptual and cultural aspect of knowledge they want pupils to reach.

Silvia Sbaragli

Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni

Silvia Sbaragli
Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI
di Locarno, Svizzera

1. Introduzione

Durante il processo di insegnamento/apprendimento della matematica capita spesso di affrontare situazioni di complessità anche notevole che richiedono saperi di base per essere gestite e risolte correttamente da parte degli allievi. Saperi che gli allievi dovrebbero possedere e mobilitare nei diversi contesti reali o ideali che vengono proposti fin dalla scuola primaria e per i quali si dà per scontato nei livelli scolastici successivi che l'apprendimento sia avvenuto, ma che spesso nascondono insidie e difficoltà diffuse che perdurano nel tempo. Questo è il caso dell'altezza di poligoni, un sapere in apparenza semplice che anche i risultati delle prove Invalsi dimostrano non essere posseduto neppure da parte degli allievi di scuola secondaria. In Botta e Sbaragli (2016) sono presentati i risultati di tre item delle prove Invalsi somministrati uno al terzo anno di scuola media e due nel biennio della scuola secondaria superiore, dai quali emergono difficoltà diffuse nel mobilitare in diverse situazioni il concetto di altezza di poligoni. Tramite l'analisi di 250 fascicoli Invalsi, scelti a campione, è emerso come il non riconoscere un segmento esterno e disposto in posizione non standard come altezza del triangolo, spinga la maggior parte degli studenti a cercare strategie alternative, preferendo strade lunghe, complesse o inadatte, che risultano spesso fallimentari. Tali difficoltà risultano ormai classiche in letteratura (Wertheimer, 1959; Hershkowitz, 1987; D'Amore, 1993).

In questo articolo si riportano le convinzioni di un gruppo di allievi alla fine della scuola primaria sul concetto di altezza di poligoni, basate su diverse misconcezioni, legate in parte ai mezzi semiotici di oggettivazione (Radford, 2003) proposti dai propri docenti.

2. Quadro teorico

2.1. Misconcezioni evitabili

Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare in letteratura un significato condiviso del termine "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili e a volte addirittura convincenti (D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12). In un testo del 1998, Rosetta Zan parla proprio di misconcezioni come "causa di errori":

> «Le *convinzioni specifiche* scorrette ("misconceptions") sulla matematica sono quelle responsabili di *errori*, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile» (Zan, 1998).

Le misconcezioni così intese sono state da noi distinte in due grandi categorie: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005, p. 56 e succ.). Le prime misconcezioni sono quelle che non dipendono direttamente dalla *trasposizione didattica* effettuata dal docente né dall'*ingegneria didattica* (Artigue, 1989), ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto; sapere, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa delle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo. Le seconde misconcezioni *dipendono proprio dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica* e scelte concernenti *l'ingegneria didattica* che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi.
In questo articolo focalizziamo la nostra attenzione sulle *misconcezioni evitabili*, analizzate in una *cornice semiotico-culturale* (Radford, 2006), considerando le scelte didattiche del docente come una delle possibili cause di tali misconcezioni relative all'argomento altezza di poligoni. Tale approccio era già stato seguito per analizzare il concetto di angolo in Sbaragli & Santi (2011).

2.2. Cornice semiotico-culturale

In questa ricerca facciamo riferimento all'approccio semiotico culturale proposto da Luis Radford a partire dagli anni 2000 che attribuisce un ruolo centrale alla semiotica inserita in una visione antropologica del pensiero, degli oggetti matematici e dell'apprendimento. Sia gli oggetti matematici che l'apprendimento richiedono un'attività riflessiva mediata, ma i due processi sono profondamente diversi l'uno dall'altro; infatti, scrive Radford:

> «Mentre i nuovi concetti culturali nascono da attività riflessive mediate compartite nella zona di sviluppo prossimale della cultura, l'apprendimento scolastico consiste nel processo di trasformare attivamente e creativamente questi concetti culturali incarnati nei testi, negli artefatti, nel linguaggio e nelle credenze in oggetti di coscienza. Questo processo nel quale soggetto e oggetto si modificano a vicenda, è il processo di significazione in cui la conoscenza soggettiva e quella oggettiva si fondono» (Radford, 2006, p. 60, trad. propria).

Radford chiama questo processo, che porta l'allievo a prendere coscienza dell'oggetto matematico, «oggettivazione» (Radford, 2005a, p. 116).

Secondo l'approccio semiotico-culturale che stiamo seguendo, non possiamo ridurre la nostra esperienza individuale a una solitaria interazione sensoriale e cognitiva con il mondo, ma il modo in cui entriamo intenzionalmente in contatto con la realtà è intrinsecamente determinato da fattori storici e culturali. I mediatori, gli artefatti, i gesti, i simboli, le parole che Radford chiama «mezzi semiotici di oggettivazione» (Radford, 2003) non sono dei semplici arnesi con i quali manipoliamo il mondo ma mediatori dei nostri atti intenzionali, portatori di una conoscenza storica costruita dall'attività cognitiva delle generazioni precedenti. Tali mezzi determinano e costituiscono le pratiche socialmente condivise nelle quali si sviluppano i processi di oggettivazione e assumono importanza fondamentale nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica:

> «Quello che ci appare di fronte nella nostra esperienza intenzionale è dunque sempre delimitato dalla storia culturale dei mezzi che utilizziamo per apprenderlo. (…) nel dare significato a qualcosa ricorriamo al linguaggio, ai gesti, ai segni o ad oggetti concreti attraverso i quali rendiamo le nostre intenzioni manifeste e che il linguaggio, i segni e gli oggetti trasmettono una intelligenza incarnata (Pea, 1993) e portano dentro di sè, in un forma condensata, l'esperienza che si è sviluppata nella storia dell'attività cognitiva e artistica e gli standard scientifici dell'indagine (Lektorsky, 1984)» (Radford, 2006, p. 52, trad. propria).

Allievi e insegnanti si trovano immersi in un contesto sociale e culturale in cui trovano oggetti che rientrano nella loro cultura. L'insegnante ha istituzionalmente il compito di guidare l'allievo nel processo di oggettivazione, affidandosi ai mezzi semiotici di oggettivazione e ai modi culturali di significazione che la storia e la cultura gli mettono a disposizione. Egli è chiamato a scegliere tra i diversi mezzi semiotici quelli che reputa più significativi e ricchi per l'apprendimento di un oggetto matematico.

È utile alla nostra analisi tenere conto del fatto che, seguendo Godino e Batanero (1994) e D'Amore e Godino (2006), agli elementi appena richiamati è possibile attribuire una dimensione personale e istituzionale. Il sistema di pratiche coinvolge sia un singolo individuo sia un gruppo di individui istituzionalmente riconosciuto, nello specifico la classe; lo stesso si può dire per l'oggetto matematico che esiste sia in una relazione personale con un soggetto sia in una relazione istituzionale con la cultura dalla quale è emerso e con il gruppo sociale che gli conferisce un valore di conoscenza. Lo stesso punto di vista è sostenuto da Radford:

> «Vorrei porre l’accento sul fatto che è vantaggioso pensare al significato come un costrutto a due facce, come due facce della stessa medaglia. Da un lato il significato è un costrutto soggettivo: è il contenuto soggettivo come è inteso dalle intenzioni dell’individuo. Il significato è legato all’esperienza e alla storia personale più intima dell’individuo; esprime ciò che rende l’individuo unico e singolare. Dall’altro lato e allo stesso tempo il significato è anche un costrutto culturale nel senso che, prima dell’esperienza soggettiva, all’oggetto intenzionale dell’individuo (l’objet visé) sono stati attribuiti valori culturali e un contenuto teorico che sono riflessi e rifratti dai mezzi semiotici utilizzati per riconoscerlo» (Radford, 2006, p. 53, trad. propria).

L’apprendimento come processo di oggettivazione richiede un allineamento tra la dimensione personale e intenzionale dell’allievo e quella istituzionale che coinvolge gli aspetti storici e culturali.
È necessario, dunque, considerare la rete complessa di pratiche individuali e sociali, di significati, consuetudini, credenze e convinzioni in cui l’insegnante deve quotidianamente orientarsi quando attiva i mediatori per favorire l’apprendimento del sapere matematico da parte dei suoi allievi; si tratta di una rete dalla quale possono emergere comportamenti e scelte poco vincenti per andare verso un sapere istituzionale riguardante l’altezza.
È in quest’ottica che si possono interpretare le misconcezioni evitabili all’interno della prospettiva semiotica culturale. In effetti, tali misconcezioni dipendono direttamente dalle scelte degli insegnanti legate alla trasposizione didattica e all’ingegneria didattica; due fattori che, alla luce della cornice semiotica culturale, risultano determinanti per allineare il significato personale dell’allievo e quello culturale, quando l’insegnante gestisce le pratiche d’aula.

3. Domande di ricerca

Le domande di ricerca che ci siamo posti sono le seguenti:

D1 Quali convinzioni possiedono gli allievi alla fine della quinta primaria sul concetto di altezza di un poligono? In particolare, quale definizione scelgono per parlare di altezza di un poligono? Quali rappresentazioni semiotiche riconoscono come possibili rappresentazioni di un'altezza di un poligono? Vi è coerenza tra la definizione scelta e le rappresentazioni individuate?
D2 Se si verificassero misconcezioni tra le convinzioni degli allievi, da che cosa potrebbero dipendere? Le eventuali misconcezioni rilevate risultano conseguenza delle proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere?

4. Ipotesi di ricerca

I1 A nostro parere diversi allievi all'uscita della scuola primaria possiedono misconcezioni relative al concetto di altezza di poligoni. In particolare, riteniamo che la maggior parte degli allievi sia legato a una delle classiche definizioni dei libri di testo di scuola primaria: «l'altezza è il *segmento* che *"parte"* da un *vertice* e *"cade"* perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento». Quest'unica definizione limitata e vincolante è accompagnata a rappresentazioni stereotipate di tale concetto che non permettono di riconoscere rappresentazioni non convenzionali di altezze di poligoni e di aver compreso il concetto in senso istituzionale. In particolare, riteniamo di rintracciare misconcezioni ormai classiche in letteratura (Wertheimer, 1959; Hershkowitz, 1987; D'Amore, 1993; Martini e Sbaragli, 2005): altezza che deve obbligatoriamente partire da un vertice, altezza interna alla figura, altezza necessariamente verticale.
I2 A nostro parere la maggior parte delle misconcezioni rilevate risultano conseguenza delle proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere, basate su una definizione univoca data a priori e non negoziata con gli allievi e da rappresentazioni stereotipate del concetto. Le consuetudini e gli stereotipi dei libri di testo e delle prassi scolastiche, dal punto di vista dei mezzi semiotici di oggettivazione proposti per spiegare questo oggetto matematico, risultano a nostro parere limitanti e vincolanti.

Le misconcezioni relative all'altezza possono quindi in parte derivare dalle scelte didattiche effettuate dai docenti ed essere quindi considerate come *evitabili* (Sbaragli, 2005).

5. Metodologia di ricerca

La ricerca si sviluppa in due fasi, la prima rivolta agli allievi e la seconda ai relativi docenti.

Prima fase. Si sono indagate le convinzioni degli allievi alla fine della quinta primaria tramite un questionario iniziale e una intervista individuale semi-strutturata effettuata a metà allievi scelti a sorteggio appartenenti a 6 classi di diverse città dell'Emilia Romagna, per un totale di 64 allievi. Si è scelto di intervistare metà allievi per classe per poter considerare un maggior numero di classi.

Le richieste del questionario sulla cui base condurre l'intervista sono state divise in sette parti:

1) Che cos'è per te un'altezza di un poligono?

2) Disegna un poligono. Quante altezze ha? Se le ha, disegnale.

3) Quali tra i seguenti segmenti possono essere considerati altezze dei triangoli? Colora quelle che consideri altezze dei triangoli.

Motiva sotto ogni figura la tua scelta. (Si è lasciato lo spazio della motivazione sotto ogni figura, del tipo; sì/no e righe vuote).[1]

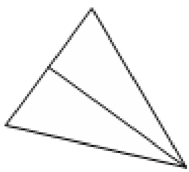


Fig. 1

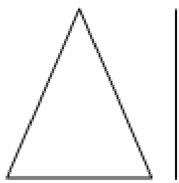


Fig. 2

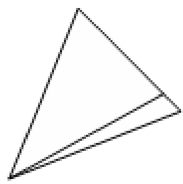


Fig. 3

[1] Si è scelto di non indicare in maniera esplicita la perpendicolarità con simboli perché non è una prassi diffusa per la scuola primaria e avrebbe influenzato la motivazione delle risposte.

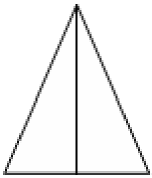


Fig. 4

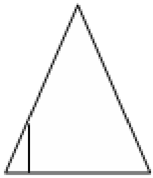


Fig. 5

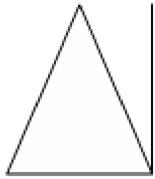


Fig. 6

4) Quali tra i seguenti segmenti possono essere considerati altezze? Colora quelle che consideri altezze.
Motiva sotto ogni figura la tua scelta. (Si è lasciato lo spazio della motivazione sotto ogni figura, del tipo; sì/no e righe vuote).

Fig. 1

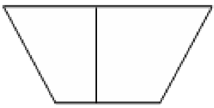


Fig. 2

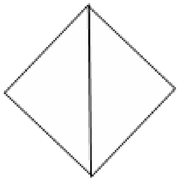


Fig. 3

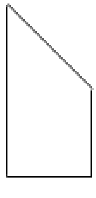
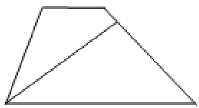


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6



5) Quante altezze ha un triangolo? Perché? Disegna.
6) Quante altezze ha un parallelogrammo? Perché? Disegna.
7) Quante altezze ha un poligono con dodici lati? Perché? Disegna.

Seconda fase. La seconda fase verte su una intervista individuale semi-strutturata effettuata ai 6 insegnanti di matematica delle stesse classi, per verificare la coerenza tra quanto sostenuto dagli allievi e le scelte didattiche effettuate in classe. In particolare, si sono poste domande che vertono principalmente sui seguenti aspetti: come è stato introdotto il concetto di altezza in classe; se, ed eventualmente

quando, è stata fornita la definizione agli allievi; quali mezzi semiotici sono stati proposti in classe per parlare di tale concetto; quali sono le motivazioni di tali scelte; quali tra le diverse rappresentazioni semiotiche proposte agli allievi per parlare di altezza sono accettate dai docenti; se riscontrano coerenza tra le risposte dei propri allievi e le proprie scelte didattiche.
L'intento è di far emergere le convinzioni degli insegnanti sul concetto di altezza e il loro modo di lavorare in classe, dal quale far scaturire in seguito importanti informazioni per questa ricerca.
Durante le interviste degli allievi e degli insegnanti si è messo a disposizione un foglio e una penna in caso di richiesta esplicita. Le interviste sono state registrate.

6. Analisi dei risultati

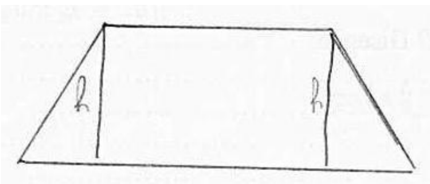
6.1. Risultati degli allievi

Richiesta 1. Dalle risposte degli allievi alla prima domanda del questionario emergono i seguenti risultati:

Definizione	**Cl. A (10)**	**Cl. B (11)**	**Cl. C (10)**	**Cl. D (12)**	**Cl. E (10)**	**Cl. F (11)**
È un segmento che parte dal vertice e cade/arriva perpendicolarmente alla base	10	-	8	10	8	-
È un segmento verticale	-	-	-	-	2	10
Altezza come linea che taglia a metà/divide	-	1	-	2	-	1
Misura verticale/Misura di un lato/Misura per vedere quanto è alta una figura	-	5	-	-	-	-
Una linea che collega la base al vertice	-	-	1	-	-	-
È una cosa molto alta	-	1	-	-	-	-
Distanza di un lato/tra due basi	-	3	-	-	-	-
Non risponde	-	1	1	-	-	-

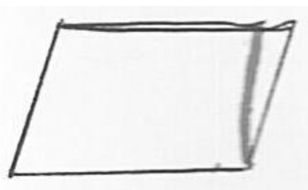
Dai risultati emergono scelte degli allievi uniformi per 5 classi su 6; in particolare, nelle classi A, C, D e E è praticamente generalizzata la definizione di solito proposta nei libri di testo: «È un segmento che parte dal vertice e cade/arriva perpendicolarmente alla base» esplicitata con piccole modifiche nelle diverse classi; nella classe F è diffusa la scelta di altezza come segmento esplicitamente verticale, mentre nella classe B si vedono diverse concezioni degli allievi non del tutto uniformi, legate prevalentemente al concetto di misura o al concetto di altezza legata al senso comune.

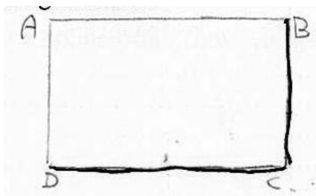
Richiesta 2. I risultati di queste domande sono stati accorpati in quanto non si rilevano differenze sostanziali tra le diverse classi. Sui 64 allievi intervistati, 43 disegnano uno dei seguenti quadrilateri in posizione standard: quadrato, rettangolo, parallelogrammo o trapezio isoscele. Di questi, 28 allievi rappresentano due altezze verticali (prot. 1 e 2), 13 allievi una sola altezza (prot. 3) e 2 allievi affermano che un rettangolo ha due altezze in coincidenza di lati consecutivi di un rettangolo (prot. 4).



Prot. 1

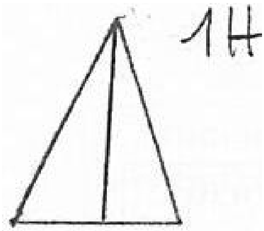
Prot. 2


Prot. 3

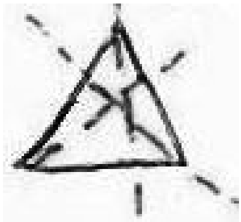


Prot.4

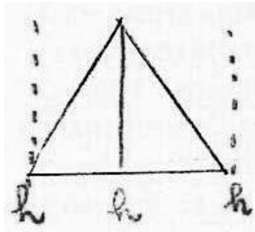
21 allievi scelgono un triangolo; di questi 16 individuano un'unica altezza (prot. 5) e 5 tre altezze (prot. 6); di questi ultimi, 3 le rappresentano rispetto ad un unico lato (prot. 7).



Prot. 5



Prot. 6



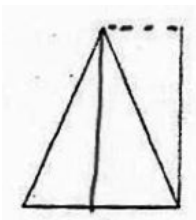
Prot. 7

Da questi risultati emerge come gli allievi siano legati alle rappresentazioni delle altezze che "partono dal vertice", disposte in modo verticale e univoco, questo comporta la mancanza di accettazione di tutte le altezze delle figure scelte. In particolare, il vincolo derivante dalla concettualizzazione del concetto di altezza legato al verticale, al cadere (termine che ricorda la forza di gravità e la verticalità) o "dell'alto rispetto alla base" rimanda a rappresentazioni limitate.

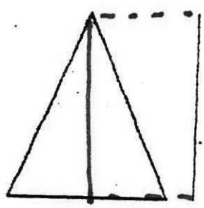
Richiesta 3. Le percentuali di risposte corrette per le diverse figure distribuite fra le 6 classi sono le seguenti:

	Percentuali di risposte corrette					
Numero figura	**Cl. A (10)**	**Cl. B (11)**	**Cl. C (10)**	**Cl. D (12)**	**Cl. E (10)**	**Cl. F (11)**
Figura 1	100%	81,8%	90%	66,6%	70%	36,4%
Figura 2	0%	18,2%	0%	16,6%	0%	36,4%
Figura 3	100%	72,7%	90%	83,3%	90%	81,8%
Figura 4	100%	90,9%	100%	100%	100%	100%
Figura 5	100%	81,8%	90%	83,3%	90%	90,9%
Figura 6	0%	90,9%	10%	33,3%	20%	54,5%

Dai risultati emergono diffuse difficoltà nell'accettare i segmenti di figura 2 e 6 come possibili altezze dei triangoli. In particolare, nelle classi nelle quali è presente la classica definizione del libro (cl. A, C, D e E) le percentuali di riconoscimento delle altezze di queste figure sono inferiori rispetto alle altre. Va osservato che nella classe B, dove non è uniforme una specifica definizione di altezza, si è riscontrata una percentuale molto alta di risposte corrette nella figura 6, a differenza delle altre classi. Gli allievi della classe F, molto legati alla verticalità, accettano maggiormente le rappresentazioni delle figure 2 e 6 come possibili altezze del triangolo, ma sbagliano di più quando l'altezza non è verticale, come nel caso della figura 1.
Le motivazioni di coloro che sbagliano il riconoscimento delle possibili altezze delle figure 2 e 6, dove si concentrano le difficoltà, sono le seguenti: il 43,75% degli allievi, appartenenti alle classi A, C, D e E, afferma: «Perche l'altezza DEVE partire dal vertice e cadere perpendicolare alla base» (usata anche nel caso della figura 6); giustificazione che richiama la definizione scelta e che viene interpretata come segmento che parte dal vertice disposto nella parte superiore del foglio e che porta a considerare, una unica altezza interna alla figura; 9 di questi allievi disegnano all'interno dei triangoli quella che per loro è la "vera" altezza del triangolo (prot. 8 e 9).



Prot. 8



Prot. 9

Il 34,37% degli allievi, distribuito sulle diverse classi, afferma: «Non può essere esterna», «Non può essere staccata dalla figura», «Non può essere lontana», nel senso che deve essere interna alla figura; il

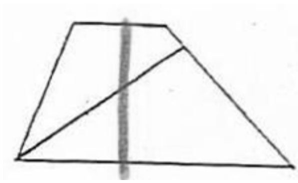
10,9% degli allievi, appartenente alla classe F, giustifica la scelta affermando: «Perché non è verticale». In generale le motivazioni fornite risultano coerenti con la definizione scelta dagli allievi. Le definizioni non sono solo ripetute dagli allievi, ma anche applicate in modo coerente nei diversi contesti. Gli allievi della classe B, meno uniformi nella definizione, pur rispondendo meglio per alcune figure, come la 6, faticano maggiormente a giustificare le loro risposte. Le altre motivazioni sono varie e del tipo: «Perché non partono da un vertice»; «Non divide a metà la figura»; «Non congiungono la base all'angolo».

Richiesta 4.
I risultati di questa domanda sono i seguenti:

	Percentuali di risposte corrette					
Numero figura	**Cl. A (10)**	**Cl. B (11)**	**Cl. C (10)**	**Cl. D (12)**	**Cl. E (10)**	**Cl. F (11)**
Figura 1	0%	27,3%	40%	41,6%	30%	45,5%
Figura 2	70%	9,1%	60%	41,6%	60%	54,5%
Figura 3	0%	0%	20%	16,7%	10%	9,1%
Figura 4	60%	72,7%	80%	58,3%	70%	54,5%
Figura 5	50%	36,4%	50%	8,3%	10%	0%
Figura 6	40%	9,1%	40%	33,3%	30%	18,2%

Come per le richieste relative ai triangoli, anche nel caso dei quadrilateri si evidenziano difficoltà nell'accettare segmenti non standard come possibili altezze, inoltre emergono per ciascuna classe difficoltà concentrate prevalentemente sul riconoscimento di figure che non rispettano la definizione scelta. Ad esempio, gli allievi della classe B sbagliano in modo generalizzato la figura 2, accettando una diagonale come altezza, in quanto applicano la loro definizione verificando se soddisfa "quanto è alta la figura", nel senso di dimensione verticale, indipendentemente se è legata ad un lato oppure no.
Tra le motivazioni della non accettazione di alcune altezze si riscontrano principalmente le seguenti: il 31,2% motiva le proprie

scelte per le figure 1 e 3 dando importanza al vertice: «Perché il segmento non parte dal vertice» oppure «Perché non partono dal vertice opposto o perché non cadono perpendicolare alla base»; il 20,3% afferma per le figure 3, 5 e 6: «Perché non è verticale» e in alcuni casi rappresenta nel disegno quella che ritiene essere l'altezza, come nell'esempio seguente (prot. 10):

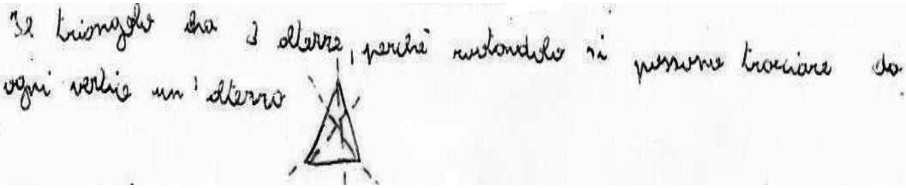


Prot. 10

Il 43,7% degli allievi motiva che i segmenti delle figure 3 e 5 non possono essere altezze: «Perché sono basi». Anche per giustificare la scelta della figura 4 alcuni allievi danno importanza alla base con risposte del tipo: «Il segmento non cade nella rispettiva base».
Sempre parlando di base, alcuni studenti che sbagliano la figura 2, motivano la propria scelta accettando il vertice nella parte inferiore del foglio come base della figura.
Il 16,6% motiva la non accettazione della figura 3 e 5 nel seguente modo: «Perché è sotto»; con percentuali minori alcuni allievi giustificano la non accettazione delle figure 3 e 4 con affermazioni del tipo: «Perché è esterno» e per la 6: «Perché sono diagonali o semplici linee».

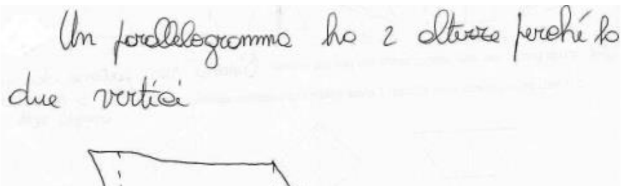
Richieste 5, 6 e 7.
A queste domande il 65,6% degli allievi afferma che il triangolo ha una sola altezza e motiva la propria scelta principalmente nei seguenti modi: «Perché è verticale», «Perché ha solo un vertice in alto», «Perché è l'unica che cade perpendicolare alla base», «Il triangolo isoscele ne ha una», «Perché divide a metà la figura in verticale», confermando la misconcezione di alcuni studenti emersa nella seconda richiesta. Il 21,8% degli allievi sostiene che sono 3 fornendo le seguenti motivazioni: «Perché ha tre vertici», «Perché

spostandolo si formano tre perpendicolari», «Perché è un tri-angolo», «Perché ce ne sono anche due esterne» (prot. 11).



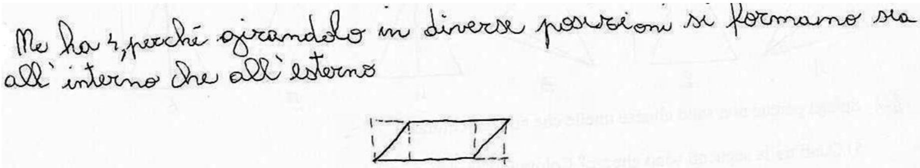
Prot. 11

Il 7,8% degli allievi afferma che le altezze di un triangolo sono 2, motivando la propria scelta con frasi del tipo: «Perché sono una interna e una esterna» e il 4,8% degli allievi non risponde.
Per quanto riguarda le domande relative al numero di altezze di un parallelogrammo, il 56,2% afferma che sono 2 giustificando la propria scelta nella maggior parte dei casi con la seguente affermazione: «Perché ha due vertici» (prot. 12), quindi fornendo una motivazione che mette in evidenza l'importanza che viene data per parlare di altezza esclusivamente ai vertici disposti nella parte superiore del foglio o ad altezze esclusivamente verticali:



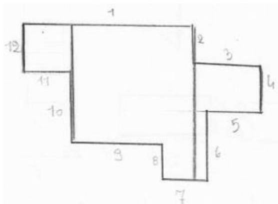
Prot. 12

Il 14% afferma 4 principalmente con la seguente motivazione: «Perché ne ha due fuori e due dentro» (prot. 13), il 14% afferma 1 senza riuscire a motivare la risposta e il 6,2% afferma 3. Molti di questi allievi non sanno giustificare la risposta. Il resto degli allievi risponde che non sa dare una risposta.



Prot. 13

Per quanto riguarda le domande relative alle altezze di un poligono di dodici lati (dodecagono), il 12,5% degli allievi afferma che ne ha 1, il 46,9% invece individua un numero compreso tra 2 e 11 (prot. 14).



Prot. 14

Significativo è un allievo che inizialmente risponde 12 e motiva la sua scelta nel seguente modo: «Perché sono 12 vertici», ma poi disegna le diagonali del poligono, le conta e decide di rispondere 6.
Infine il 4,7% degli allievi risponde 12, motivando nel seguente modo: «Perché potrebbe appoggiarsi su tutti i lati» o «Perché ha dodici vertici e ognuno dei quali cade su una base» o non so il rimanente. Il 35,9% degli allievi dichiara di non sapere la risposta.

6.2. Analisi delle interviste ai docenti

Dalle interviste ai 6 docenti si riscontra coerenza tra le loro convinzioni e scelte didattiche, e ciò che dichiarano i loro allievi. In particolare, tutti i docenti delle classi A, C, D e E affermano di fornire subito la definizione classica di altezza presente nel libro di testo e la applicano prevalentemente per i triangoli. Il docente della classe F non parla inizialmente di verticale, ma la esplicita successivamente diverse volte negli esempi. Anche lui la fornisce fin dall'inizio ai suoi allievi. Il docente della classe B parla di altezza come di una "misura per vedere quanto è alta la figura", per farlo disegna un triangolo e

evidenzia l'altezza verticale. Questo docente sostiene che parla di altezza agli allievi senza proporre subito la definizione, ma facendo vedere degli esempi. La maggior parte di questi docenti fornisce quindi una definizione a priori senza negoziarla con gli allievi.
Dopo aver osservato le figure del questionario fornite ai propri allievi, tutti i docenti affermano di non lavorare esplicitamente su rappresentazioni di altezze disposte in posizione non standard, tranne in alcuni casi relativi prevalentemente al triangolo, e soprattutto di non proporre rappresentazioni come quella della figura 2 e 6 delle richieste 3 e come la 1, 3, 4 5 e 6 delle richieste 4. In particolare, 3 dei 4 docenti delle classi con la definizione "classica" dichiarano che credevano che l'altezza dovesse per forza partire da un vertice, mostrando di avere le stesse misconcezioni dei propri allievi, un docente dimostra di avere qualche dubbio ed è indeciso sulla scelta della correttezza delle diverse altezze. I docenti rimangono invece sorpresi sul fatto che la maggior parte dei propri allievi afferma che un triangolo ha un'unica altezza e dichiarano che questo può derivare dal fatto che ne disegnano solitamente solo una. Tutti i docenti affermano di essere legati loro stessi esclusivamente ai mezzi semiotici proposti dai libri e su questi aver costruito le proprie convinzioni sul concetto di altezza. Dimostrano essi stessi di essere legati al vincolo del vertice, alla verticalità, all'altezza come segmento interno al poligono. Una docente afferma di usare con gli allievi il filo a piombo per individuare le altezze, proposta didattica presente su alcuni libri di testo, generando così misconcezioni legate alla verticalità.
4 docenti non hanno mai riflettuto sulle possibili altezze di poligoni con un numero di lati maggiore di quattro, mentre 2 dichiarano che per loro le altezze le hanno solo i triangoli e i quadrilateri, dato che nel libro c'è scritto che i poligoni regolari hanno le apotema e non le altezze. Tutti i docenti ammettono di non aver mai riflettuto in modo approfondito su questo concetto e di aver bisogno di formazione in ambito geometrico. Le interviste si sono concluse con esigenze di chiarimenti concettuali su tale oggetto matematico e si è riflettuto sull'importanza di trattare questo concetto in modo generalizzato per

qualsiasi poligono e far sì che ogni poligono abbia un numero di altezze pari al numero di lati. L'altezza è stata considerata come: "Distanza massima dei punti del poligono rispetto a un lato o al suo prolungamento o, se si preferisce, rispetto alla retta che contiene quel lato" (nel concetto di distanza è già implicita la perpendicolarità).

7. Risposte alle domande di ricerca

Le risposte alle domande di ricerca sono le seguenti:

R1 Diversi allievi all'uscita della scuola primaria possiedono misconcezioni relative al concetto di altezza legate prevalentemente a ritenere il vertice come punto vincolante per tracciare le altezze, alla verticalità, all'univocità e al considerarla esclusivamente interna alla figura.

R2 Come ipotizzato, le misconcezioni rilevate risultano coerenti con le proposte scolastiche avvenute in classe per questo sapere, basate su mezzi semiotici di oggettivazione limitati e stereotipati, che non permettono all'allievo di trovare "un'unione tra oggetto personale e oggetto istituzionale". In particolare, la scelta vincolante della definizione fornita ai propri allievi e le rappresentazioni stereotipate e vincolanti limitano la costruzione dell'oggetto in senso istituzionale. Si rileva come i docenti stessi si siano costruiti concezioni dell'altezza legate ai limitati mezzi semiotici di oggettivazione proposti nei libri di testo per la scuola primaria che non hanno permesso una riflessione più ampia dell'oggetto in senso matematico.

8. Conclusioni

In questa ricerca si è messo in evidenza come il significato oggettivato dai mezzi semiotici scelti dai docenti per l'altezza, non è coerente con il suo significato culturale matematico. L'esistenza di incoerenza da questo punto di vista è fonte di misconcezioni nella mente degli allievi; misconcezioni che, da un punto di vista semiotico, comportano l'incapacità da parte dell'allievo di coordinare adeguatamente le diverse rappresentazione quando egli cerca di dare senso all'oggetto matematico in diversi contesti.

Tali misconcezioni sono riscontrabili anche nei docenti stessi che si affidano per la trasposizione didattica in modo quasi esclusivo alle proposte univoche e vincolanti dei libri di testo, più che a scelte personali consapevoli, e su queste costruiscono il significato istituzionale di tale oggetto. Come sostengono D'Amore e Fandiño (2009), un docente di matematica avrebbe bisogno per insegnare di una forte competenza matematica acquisita per approfondimento personale oltre che sulla disciplina, anche sulla storia e sulla visione epistemologica di ogni singolo oggetto, così da riflettere, paragonare, analizzare ed evitare le situazioni qui descritte.
La costruzione del significato di un oggetto matematico, in cui si realizza l'unità dell'individuo con la propria cultura, è possibile attraverso mezzi semiotici di oggettivazione vari e ben scelti che conducono l'atto intenzionale dell'individuo verso l'oggetto matematico. La scelta dei segni non è in effetti neutra o indipendente; come sostiene Radford (2005b, p. 204):

> «I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (…) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza»,

tale individuazione va gestita con forte senso critico da parte dell'insegnante.
È inoltre emerso come il soggetto in fase di apprendimento sia tenuto a debita distanza da mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratica, non favorendo così il

> «(…), trasformare attivamente e creativamente questi concetti culturali incarnati nei testi, negli artefatti, nel linguaggio e nelle credenze in oggetti di coscienza» (Radford, 2006, p. 60, trad. propria).

L'altezza viene infatti spesso maldestramente definita in modo univoco alla scuola primaria, senza che vi sia negoziazione dei saperi e poi non ripresa solitamente nei livelli scolastici successivi,

lasciando così che tali misconcezioni perdurino nel tempo (Botta & Sbaragli, 2016).
Risulterebbe invece didatticamente importante partire dalle interpretazioni di altezza che emergono dagli allievi, legate principalmente al senso comune e da queste costruire nuove immagini dell'oggetto tramite mezzi semiotici di oggettivazione eterogenei e distanti dagli stereotipi (Martini & Sbaragli, 2005). Questo era già stato evidenziato anche per l'oggetto angolo (Sbaragli & Santi, 2011).
Risulta quindi indispensabile, per il superamento di *misconcezioni inevitabili* e l'assenza di *misconcezioni evitabili*, fornire una grande varietà di mezzi semiotici di oggettivazione opportunamente organizzati e integrati in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi gestite con consapevolezza e coerenza da parte dell'insegnante.

Bibliografia

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9, 3, 281-308.

Botta, E., & Sbaragli, S. (2016). L'importanza dei saperi fondanti. Il caso dell'altezza. *Nuova secondaria*, 1, XXXIV, 112-116.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.

D'Amore, B., & Godino, D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica, *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione», *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.

Godino, J.D., & Batanero, C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or, when "a little learning is a dangerous things", *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Ithaca, NY, 3, 238 – 251.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid. P. 143.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, *Math. Thinking and Learning*, 5(1), 31-70.

Radford, L. (2005a). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt and B. Davis (eds.) (2005). *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*.

Radford, L. (2005b). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 39-65.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili", *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-71.

Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*.
Rivista online:
http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196
http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/issue/view/33/showToc
San Paolo, Brasile: Uniban. 4(2), 117-157. ISNN 2176-5634.

Wertheimer, M. (1959). Productive thinking. New York: Harper & Row. (Edizione ampliata rispetto alla prima, 1945). [Trad. it. Firenze: Giunti e Barbera].

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.