

# Quanti angoli!

di Luca Crivelli e Silvia Sbaragli

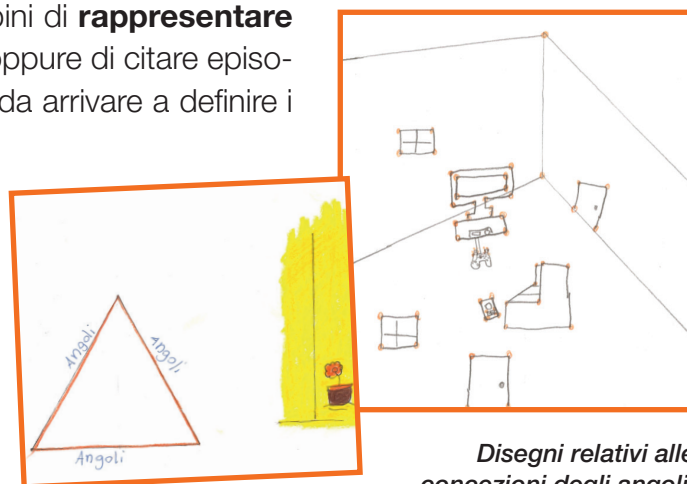
Per citazione: Crivelli L. & Sbaragli S. (2022). *Quanti angoli!*. Gaia Edizioni.  
<https://missioneinsegnante.it/2022/03/07/quanti-angoli/>

## I significati dell'angolo

“Angolo” è una **parola polisemica perché ha diversi significati**. Quando viene affrontato questo argomento nell’ambito della Matematica, gli allievi ne hanno già **concezione**, sono in grado di associare il termine “angolo” a situazioni quotidiane (l’angolo della lettura, l’angolo dei giochi, l’angolo della strada ecc.) e per questo è importante iniziare il percorso didattico tenendo conto del loro vissuto. Il termine “angolo” viene spesso utilizzato per indicare uno spazio raccolto vicino a un vertice, ed è quindi facile che questo significato sia quello meglio compreso dai bambini. Ma tale interpretazione può essere in contrasto con le caratteristiche del concetto di angolo geometrico.

Possiamo iniziare il percorso chiedendo ai bambini di **rappresentare un angolo** su un foglio, attraverso un disegno, oppure di citare episodi in un cui hanno sentito parlare di angoli, così da arrivare a definire i diversi contesti d’uso relativi a questo termine.

Le risposte fornite potranno riguardare l’angolo di una stanza (si pensi all’angolo come luogo destinato a uno scopo, per esempio “l’angolo della pittura”) o di una strada (il negozio di frutta e verdura che si trova all’angolo dietro la scuola), lo sport (il calcio d’angolo), la struttura dell’aula (l’angolo dei libri), i modi di dire (essere messi all’angolo) ecc.



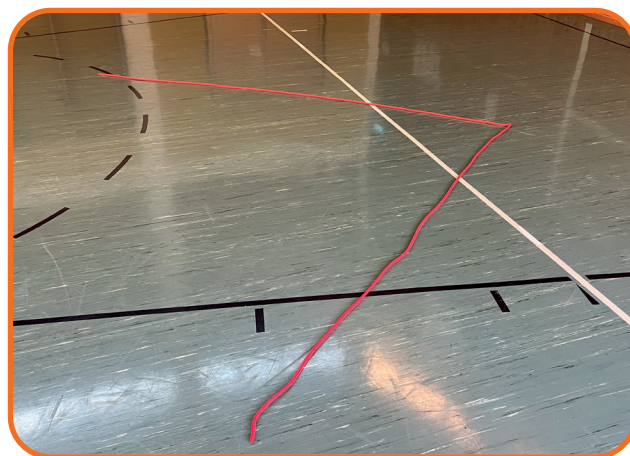
Disegni relativi alle concezioni degli angoli.

Dopo aver raccolto tutte le proposte degli allievi, nel caso in cui non sia ancora emerso il concetto di **angolo in matematica**, possiamo formulare le seguenti domande: “Qualcuno ha già sentito parlare di angoli in matematica? Cosa si intende?” Partendo da queste sollecitazioni, mettendo in evidenza le differenze con il linguaggio comune, possiamo aprire una discussione. Gli allievi potrebbero aver già sentito parlare di angoli in geometria come parti di figure conosciute, per esempio i triangoli o i quadrati, ma allo stesso tempo potrebbero confondere il concetto di “angolo” con quello di “vertice”. In questa fase non è importante arrivare alla definizione precisa di angolo in matematica perciò tutte le idee degli allievi possono essere raccolte e considerate. Ci sarà modo di esaminarle in un secondo tempo, durante o alla fine del percorso sul tema degli angoli, con l’obiettivo di rielaborarle e raffinarle, scartando quelle scorrette.

## Realizziamo angoli

Andiamo alla fase successiva: **realizzare concretamente degli angoli matematici**. Per valorizzare le caratteristiche dell’angolo è importante avere a disposizione uno spazio ampio, come la palestra, un giardino o un ambiente esterno all’aula libero da banchi, in cui sia facile muoversi senza scontrarsi con gli oggetti. Cominciamo col chiedere agli allievi **quali elementi sono necessari per rappresentare un angolo** (per aiutarli, possiamo richiamare quanto emerso dalla raccolta delle

loro concezioni per quanto concerne la matematica). La risposta corretta sarebbe che occorre avere delle linee per rappresentare i suoi lati (associandoli ai poligoni), e che queste linee vanno unite in modo da individuare un punto di incontro. Per fare questo possiamo servirci di due corde, come quelle utilizzate nelle lezioni di educazione fisica, oppure dei grossi gomitoli di lana. A un allievo chiederemo di avvicinare due estremi delle corde, facendoli coincidere, mentre ad altri due di prendere gli altri estremi e di allontanarsi sempre di più, finché è possibile, tenendo le corde ben tese. Questo sarà utile per far percepire agli allievi che **queste corde dovrebbero essere delle semirette**, ossia delle parti di rette limitate nel punto di origine ma illimitate nell'altro estremo. *Con gli occhi della mente* si può immaginare di farle continuare senza fine, così da **individuare due parti di piano illimitate, ciascuna delle quali rappresenta un angolo**. Successivamente invitiamoli a sceglierne uno, per fare attività volte a esplorare in maniera corporea, giocosa e motivante le caratteristiche di questa particolare figura geometrica.



*Corde posizionate in modo da rappresentare un angolo in palestra.*

- **Tutti dentro e tutti fuori dall'angolo!** Chiediamo a tutti gli allievi di entrare nell'angolo scelto, oppure di uscirne. Questa proposta può risultare più divertente aumentando o diminuendo l'ampiezza dell'angolo individuato dalle corde, oppure aggiungendo delle regole per renderla più simile al gioco "acchiapparella": un allievo cercherà di prendere i propri compagni inseguendoli, mentre tutti gli altri scapperanno per non farsi toccare. L'angolo può rappresentare una zona sicura in cui non si può essere "acchiappati", ma dove non è possibile fermarsi per più di un certo numero di secondi.
- **Punti che appartengono o non appartengono all'angolo.** Obiettivo di questa proposta è far riflettere gli allievi sulle **diverse parti dell'angolo**. Una volta che è stato individuato un angolo, appoggiamo a terra le corde che abbiamo utilizzato. Il docente può ora cambiare continuamente la propria posizione rispetto all'angolo, chiedendo di volta in volta agli allievi di stabilire se si trova all'interno dell'angolo oppure no. È importante, nel fare questo, posizionarsi anche sul punto di incontro fra le due corde (la sua origine), così come sulle corde stesse. Insieme si arriverà a stabilire che l'angolo non è formato solo dalla superficie interna, ma anche dalla sua origine e dalle sue semirette, dette "lati".



*Il canestro si trova all'interno dell'angolo rappresentato con le corde.*

- **Dove finisce l'angolo?** Obiettivo di questa proposta è far riflettere gli allievi sull'**illimitatezza dell'angolo**. Chiediamo loro di stabilire se un determinato punto è interno o esterno all'angolo scelto. Il punto esaminato può inizialmente essere all'interno e posizionato vicino all'origine, fra le due corde. A poco a poco ci si può allontanare dall'origine, per poi chiedere agli allievi di indicare l'appartenenza di punti interni all'angolo ma che si trovano a una distanza maggiore della lunghezza delle corde. Arriveremo così a scoprire che l'estensione dell'angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati: sono state utilizzate delle corde, ma con *gli occhi della mente* occorre

immaginarle senza fine. Se ci si trova all'aperto, si può ad esempio proporre agli allievi di stabilire se un edificio o una montagna che si vedono in lontananza si trovano dentro o fuori dall'angolo individuato. Analogamente si può chiedere ai bambini di spostare le corde fino a rappresentare un angolo che contenga un determinato elemento visibile da lontano.

- **Angoli più o meno ampi.** Scopo di questa proposta è far riflettere sulla grandezza che definisce gli angoli, cioè l'**ampiezza**. Una volta scoperto che la grandezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati, possiamo giocare a spostare le corde rendendo l'angolo più o meno ampio. In una prima fase non è necessario utilizzare termini specifici, ma è possibile lasciare che gli allievi si esprimano con un lessico spontaneo come "apertura" e "chiusura" dell'angolo. Il docente può quindi chiedere di individuare angoli particolari rispetto agli altri e, così facendo, un po' alla volta, possiamo introdurre i termini convenzionali. Avvicinando al massimo le corde, i bambini potranno scoprire che esiste un angolo "completamente chiuso", che chiameremo nullo. Qualcuno potrebbe suggerire di aprire le corde fino ad allinearle lungo un'unica direzione, rappresentando così un angolo piatto. Altri potrebbero spingersi ad aprire le corde ancora di più, scoprendo l'angolo concavo o "esagerando" fino a ottenere un angolo giro. Rifacendosi ai quadrati o ai rettangoli, alcuni allievi potrebbero anche proporre di rappresentare un "celebre" angolo, quello retto. Un angolo è che dovunque attorno a noi.

## Caccia agli angoli

Una volta rappresentati **diversi tipi di angoli**, potremo proporre attività volte a far riflettere sul fatto che **gli angoli sono presenti attorno a noi**, e che è possibile individuarli in vari oggetti.

Secondo modalità analoghe a quelle descritte in "Caccia ai numeri" <https://missioneinsegnante.it/2021/01/19/a-caccia-di-numeri/> si può organizzare la "**caccia agli angoli**" in aula, dentro l'edificio scolastico, nei dintorni della scuola, a casa. Il docente accompagnerà gli allievi durante la ricerca, scattando fotografie degli angoli trovati. Per rendere la caccia più varia e interessante, possiamo invitare gli allievi a cercare **angoli di ampiezze diverse**.



*Alcuni esempi di angoli nella realtà circostante.*

Le fotografie scattate verranno stampate, in modo da poter successivamente chiedere agli allievi di **mettere in evidenza gli angoli con pastelli o pennarelli**. Anche in questo caso è interessante notare come sia possibile scegliere quale angolo considerare fra i diversi che compaiono nella fotografia. Le immagini serviranno quindi per svolgere varie attività: trovare angoli della stessa ampiezza, ordinare gli angoli dal meno ampio al più ampio o viceversa, individuare un determinato tipo di angolo, per esempio quello retto, e così via. Possiamo stampare e incollare le immagini su cartelloni: sarà l'occasione per **istituzionalizzare il nome di alcuni angoli particolari, iniziando dal retto e dal piatto**.

Una volta individuato l'**angolo retto**, rilanciamo una nuova "caccia", assegnando compiti sempre più specifici: trovare solo angoli di ampiezze minori rispetto all'ampiezza dell'angolo retto, così da far partire la "caccia" agli **angoli acuti** (eventualmente anche il nullo), o di ampiezza maggiore rispetto all'ampiezza dell'angolo retto ma minore rispetto a quella del piatto, ossia gli angoli ottusi.

## Angolo come rotazione

Per richiamare l'attenzione degli allievi sulla superficie dell'angolo individuata dalla rotazione di una semiretta rispetto all'altra, possiamo proporre la **realizzazione di un artefatto** costituito da due legnetti o cartoncini incernierati in un perno o tramite un fermacampione, che suggeriremo di immaginare come due lancette dell'orologio.

È importante far notare che i due legnetti/cartoncini dovrebbero rappresentare delle semirette, ossia dovrebbero idealmente essere illimitate, ma nel mondo reale ci si dovrà accontentare di averne rappresentata solo una parte.

Ne risulterà un modello di angolo in formato ridotto. Possiamo ruotare le semirette per aumentare o diminuire l'ampiezza, un po' come si è fatto in precedenza con le corde durante l'attività in palestra o all'esterno. Possiamo anche fissarle tra loro e questo modello verrà preso come riferimento per fare confronti qualitativi tra ampiezze di angoli: l'angolo sarà più o meno ampio del modello costruito.



*Un modello di angolo realizzato con cartoncino e fermacampione.*

## Mondrian e angoli retti

Le **celebri opere a carattere fortemente geometrico di Piet Mondrian** rappresentano l'occasione per proporre uno studio mirato sugli **angoli retti** e per avviare delle riflessioni sui concetti di **perpendicolarità e parallelismo**.



*Allieve al lavoro per riprodurre un'opera di Piet Mondrian.*

Si distribuiscono delle riproduzioni di alcune opere dell'artista olandese, chiedendo agli allievi di provare a riprodurle nella maniera più fedele possibile, utilizzando matite, righelli e pennarelli. Per rendere il compito più semplice si può prevedere di consegnare delle riproduzioni che abbiano le stesse dimensioni del foglio su cui lavorano gli allievi, in modo da non dover effettuare riduzioni o ingrandimenti. In questa prima fase è importante evitare di dare suggerimenti operativi o di correggere eventuali imperfezioni. Quando tut-

ti avranno terminato il lavoro, le opere verranno esposte o proiettate e si discuterà insieme per cercare di capire quali riproduzioni sono più fedeli agli originali, motivando le scelte effettuate.

Oltre ad aspetti riguardanti l'uso dei colori o l'incertezza del tratto, gli allievi potrebbero segnalare con il proprio linguaggio la necessità di tracciare segmenti che siano, fra loro o rispetto ai bordi del foglio, paralleli e perpendicolari. L'intento della discussione è di individuare strumenti o modalità che permettano una riproduzione il più fedele possibile: per esempio, per disegnare linee perpendicolari è possibile sfruttare la squadra o qualsiasi altro oggetto che presenti un angolo retto (come un libro o un quaderno). Anche tener conto delle stesse distanze dal margine del foglio può essere una strategia per consentire di tracciare segmenti fra loro paralleli.

A lavoro ultimato, rivediamo le riproduzioni realizzate dagli allievi, per sistemare eventuali imprecisioni o inesattezze. Questa fase rappresenterà un'ulteriore occasione per utilizzare termini specifici come segmenti, paralleli, perpendicolari, angoli retti.



*Un allievo analizza le differenze fra l'opera originale di Mondrian e la sua riproduzione, esponendole al resto della classe.*



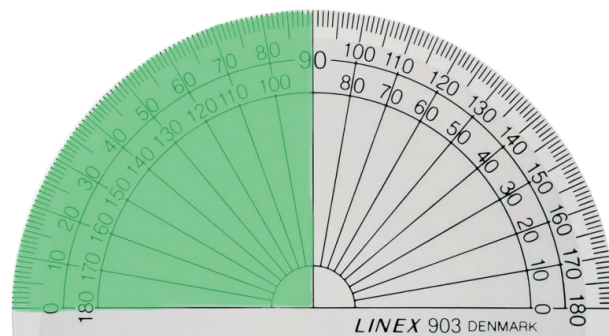
*Un'allieva riproduce l'opera di Mondrian effettuando delle misurazioni con il righello.*

## Misuriamo un angolo

Se gli allievi hanno già affrontato percorsi d'apprendimento relativi alle grandezze (come quelli descritti nei post "Questione di tempo!" <https://missioneinsegnante.it/2022/01/28/matematica-questione-di-tempo/> e "Le lunghezze intorno a noi" <https://missioneinsegnante.it/2022/01/04/le-lunghezze-attorno-a-noi/>), potranno immaginare che anche l'ampiezza degli angoli, in quanto grandezza, può essere misurata attraverso strumenti e quantificata tramite unità di misura. Per avvicinarsi intuitivamente al **concetto di grado** è possibile proporre un'attività che sfrutti le conoscenze acquisite a proposito dell'angolo retto. L'attività consiste nel realizzare un modello di angolo retto simile a un ventaglio.

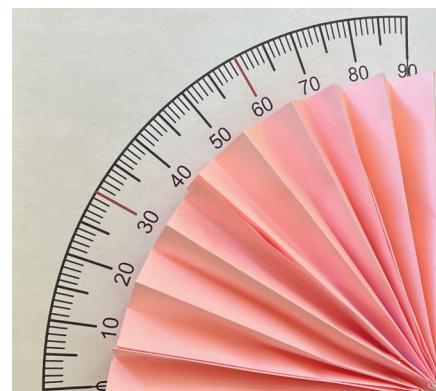
Sempre nell'ottica di far emergere le conoscenze spontanee dei bambini, è possibile chiedere se qualcuno conosce l'unità di misura dell'ampiezza degli angoli. Alcuni allievi potrebbero proporre unità di misura rientranti in altre grandezze (come i centimetri o i metri relativi alle lunghezze): preciseremo allora che l'**ampiezza**, intuitivamente intesa dai bambini come apertura delle due semirette che lo delimitano, viene **misurata in gradi**.

Andiamo adesso a costruire **un modello di angolo a ventaglio**, dove un angolo retto viene diviso idealmente in 90 parti. Se questo risulterà difficile da realizzare, possiamo pensare a una fisarmonica: poiché ogni piega della fisarmonica misura 10 gradi, immaginiamo di rendere la fisarmonica sempre più fitta! Sarà anche l'occasione per precisare che **l'angolo retto ha un'ampiezza di 90 gradi**, ossia vi sono 90 tacche che lo contraddistinguono, **indipendentemente da dove viene misurato**. Tale precisazione può essere accompagnata dall'immagine ingrandita di un goniometro in cui si vede la suddivisione in 90 gradi dell'angolo retto.



*Immagine di un goniometro in cui sono evidenziati i 90 gradi dell'angolo retto.*

Ora gli allievi possono giocare con le ampiezze, provando a rappresentare diversi angoli in base alle indicazioni ricevute: "Se un angolo retto misura 90 gradi, chi riesce a disegnare un angolo di 45 gradi? E uno di 180 gradi?" Proponiamo loro di costruire un angolo di ampiezza compresa fra 0 e 90 gradi, e di farne stimare l'ampiezza ai compagni. Questa attività ha lo scopo di avvicinare i bambini al concetto di unità di misura dell'ampiezza attraverso stime e approssimazioni: i tentativi verranno discussi insieme, non è ancora necessario utilizzare strumenti di misurazione più precisi.



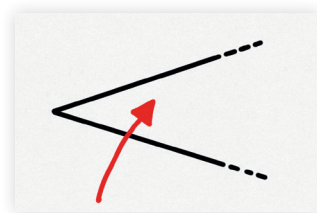
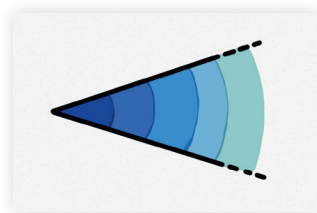
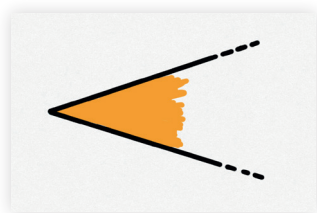
*Modello di angolo a ventaglio aperto per rappresentare un angolo di 90°.*

È importante da questo momento in poi lavorare con goniometri di diverse dimensioni, almeno tre: goniometri di dimensioni classiche, intermedie e da lavagna, così da far percepire che le tacche per un angolo retto sono sempre 90, indipendentemente dalla grandezza del goniometro e dunque dalla distanza di queste dall'origine.

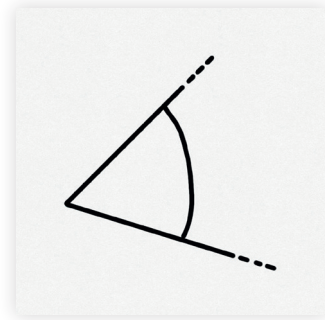
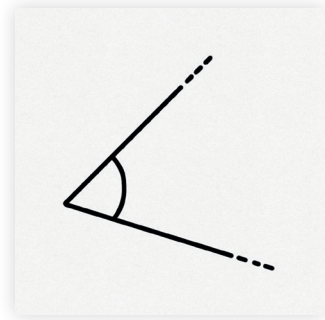
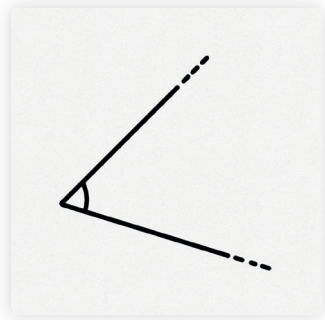
## Misconcezioni sulle ampiezze degli angoli

Durante il percorso di apprendimento degli angoli è importante prestare particolare attenzione alle rappresentazioni degli angoli, per evitare che si creino misconcezioni nella mente degli allievi.

- **Evitare di rappresentare gli angoli tramite archetti.** Se l'angolo viene rappresentato tramite un archetto, percettivamente l'allievo potrebbe associare l'ampiezza dell'angolo alla sua lunghezza ed essere portato a considerare un angolo più o meno ampio in relazione all'archetto che lo indica. Inoltre, tale rappresentazione focalizza l'attenzione degli allievi sulla parte di piano limitata vicino all'origine, piuttosto che sull'illimitatezza della parte di piano. Risulta dunque importante evitare di rappresentare un angolo in questo modo o, se si decide di farlo, giocare a non farsi ingannare dalla modalità in cui vengono disegnati gli archetti.

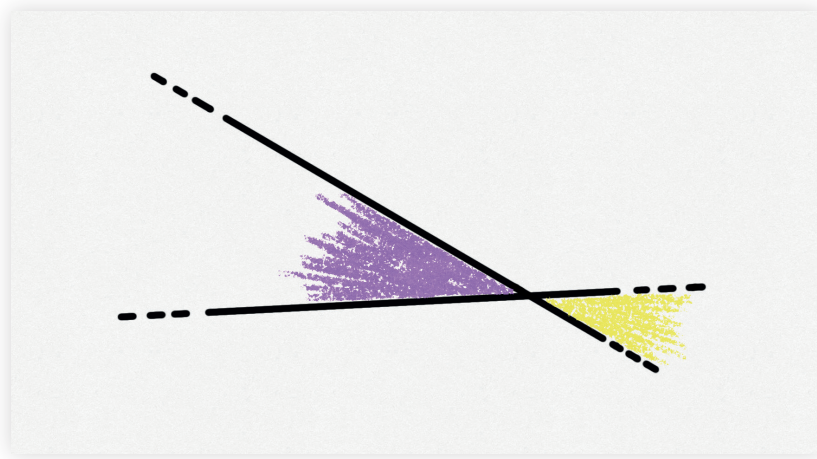


*Vari modi di rappresentare gli angoli.*



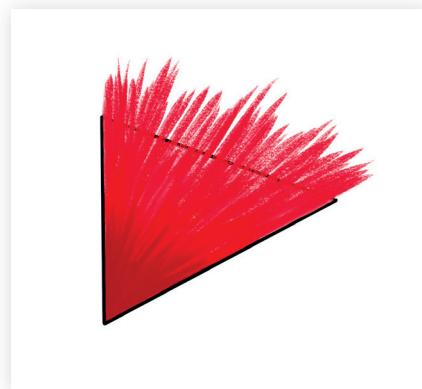
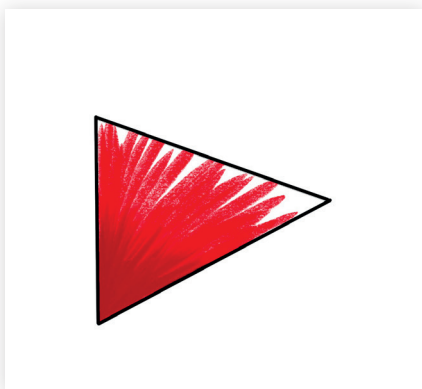
*Angoli della stessa ampiezza dove l'archetto può ingannare.*

- **Le semirette degli angoli vanno sempre considerate illimitate, indipendentemente dalla loro rappresentazione.** È facile credere che due angoli congruenti non abbiano la stessa ampiezza se le semirette che li definiscono sono rappresentate con tratti di lunghezze diverse. Anche in questo caso è possibile giocare con gli inganni delle rappresentazioni, disegnando angoli della stessa ampiezza ma con semirette più o meno lunghe.



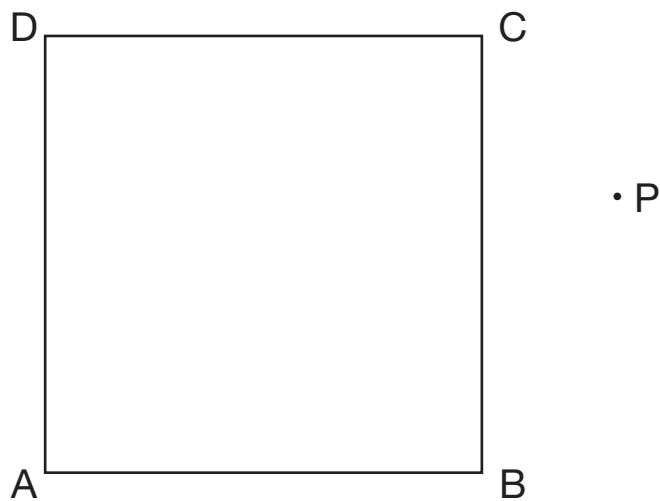
*Angoli congruenti, essendo opposti al vertice, che appaiono di ampiezza diversa.*

- **L'angolo è sempre illimitato anche se è un angolo di un poligono.** Pur essendo un poligono una parte di piano delimitata da una spezzata chiusa semplice, e dunque una parte di piano limitata, i suoi angoli sono illimitati, ossia continuano oltre al contorno del poligono stesso. Immaginando per esempio di dover colorare la superficie di uno, a scelta, dei tre angoli interni di un triangolo, si dovrebbe proseguire ben oltre il contorno della figura.



*L'angolo in un triangolo: nel primo caso l'angolo sembra limitarsi a occupare la superficie del triangolo, nel secondo la rappresentazione mostra invece che l'angolo è illimitato.*

Nel seguente esempio, alla domanda “*il punto P appartiene all’angolo di origine A del quadrato ABCD?*”, la risposta è affermativa. L’illimitatezza degli angoli di un poligono risulta in contrasto anche con il nome convenzionale degli angoli, che sono detti “interni” per differenziarli da quelli “esterni” (i suoi supplementari): per questo gli allievi spesso interpretano il termine interno come “stare dentro alla figura”, concetto in contrasto con il significato matematico di angolo. Angolo interno è solo un nome che non deve limitare il fatto di considerare gli angoli illimitati.



*Il punto P appartiene all’angolo di origine A del quadrato ABCD.*

### **Obiettivi di apprendimento**

- Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche.
- Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio.
- Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati.
- Misurare grandezze (lunghezze, tempo, ecc.) utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali (metro, orologio, ecc.).

### **Durata delle attività e del percorso**

Il percorso nella sua interezza è pensato per essere svolto in un arco di tempo prolungato, che va da un minimo di un mese fino a qualche mese, in relazione alle metodologie di lavoro attuate dai docenti.

### **Materiali**

- Corde.
- Fogli, fogli colorati, cartoncini, materiale per scrivere e disegnare.
- Materiale da bricolage e di recupero.
- Apparecchi fotografici o cellulare per scattare le fotografie.
- Strisce di cartoncino o stecchi per ghiacciolo.
- Fermacampioni.
- Riproduzioni di opere di Mondrian.
- Goniometri di varie dimensioni.

### **Variante per didattica a distanza**

Molte delle attività proposte possono essere adattate in un’ottica di didattica a distanza.

Le domande della prima proposta, volte a raccogliere le concezioni degli allievi sul tema degli angoli, possono essere poste anche per iscritto oppure online. Analogamente, l’insegnante può raccogliere i disegni degli allievi e condividere poi con l’intera classe le idee di tutti.



Le attività descritte nella proposta “Realizziamo angoli”, che prevedono l’uso delle corde, possono essere svolte anche a casa, utilizzando del semplice spago. Alternativamente potremo proporre agli allievi di analizzare situazioni rappresentate tramite disegno o fotografia senza usare alcun tipo di materiale concreto.

La “caccia agli angoli” può essere svolta anche dentro casa, o nei dintorni del proprio domicilio, se per il bambino è possibile uscire. Le fotografie raccolte potranno essere inviate al docente, che le può condividere online per avviare le successive discussioni.

Il modello di angolo con le lancette può essere costruito in autonomia utilizzando materiale di fortuna a disposizione, per esempio cartoncini e fermacampioni.

La riproduzione delle opere di Mondrian può avvenire anche a distanza; le immagini originali vengono in questo caso inviate per posta elettronica o mostrate tramite condivisione dello schermo. Gli allievi lavoreranno in autonomia con carta e matita e poi condivideranno i propri prodotti con i compagni.

Per l’attività “Misuriamo un angolo” potrebbe essere necessaria la realizzazione di una semplice presentazione con immagini per mostrare come è possibile suddividere l’angolo retto in 90 gradi. Sarà utile anche l’immagine ingrandita di un goniometro. Per rappresentare i vari tipi di angolo, gli allievi possono ascoltare o leggere le indicazioni ricevute dal docente anche a distanza, oralmente o per iscritto.

### **Per saperne di più**

Cottino L., Dal Corso E., Francini M., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L. (2011). Misura. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Pitagora.

Demartini S., Fornara S., Sbaragli S. (2017). *Numeri e parole*. Giunti Scuola.

Sbaragli S. (2008). *L’angolo che problema*. La Vita scolastica. 16, 13-15.

Sbaragli S. (2011). *Incoerenze nelle intenzionalità degli insegnanti tra aspetti concettuali, culturali e semiotici dell’angolo*. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 34, 3, 373-386.

Sbaragli S. & Santi, G. (2012). *Le scelte dell’insegnante relative al concetto di angolo*. Bollettino dei docenti di matematica. 65, 35-55.

\* Luca Crivelli è docente di scuola elementare e docente-professionista presso il Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, Svizzera.

\* Silvia Sbaragli è responsabile del Centro competenze Didattica della Matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, Svizzera.