MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MASTER

CURSO 2015-2016

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y JUEGOS DE ESTRATEGIAS: DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO REGRESIVO EN SECUNDARIA

ESPECIALIDAD: Matemáticas

APELLIDOS Y NOMBRE: Barbero Marta

DNI: AS1000630

CONVOCATORIA: Junio

TUTORA DE LA UNIVERSIDAD: Inés Gómez-Chacón
Departamento de Álgebra, Facultad de Ciencias Matemáticas

ÍNDICE

RESÚMENES

RESUMEN ESPAÑOL

Motivados por el desarrollo creciente del uso de juegos como herramienta didáctica para el desarrollo de los procesos de Resolución de Problemas y preocupados por las dificultades que los estudiantes de secundaria manifiestan en el aprendizaje de los procesos típicos del pensamiento matemático se ha elegido una investigación cuyo tema principal es el análisis de los procesos heurísticos que tienen lugar en la resolución de problemas y juegos de estrategia.

El objetivo planteado en esta investigación es profundizar en el razonamiento regresivo mediante la exploración de los procedimientos heurísticos que desarrollan estudiantes de Secundaria en la resolución de juegos de estrategias y en la resolución de problemas matemáticos abiertos.

El grupo de estudio está constituido por 22 estudiantes de cuarto de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) que cursan la asignatura optativa Ampliación de Matemáticas en un Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) de la Comunidad de Madrid. La investigación se enmarca en un estudio cualitativo basado en un experimento de enseñanza mediante la utilización de problemas y de juegos de estrategias. A partir del análisis de los protocolos, cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas se ha llevado a cabo un análisis global del grupo y un estudio de casos. El análisis de tipo inductivo ha sido realizado mediante el uso de la estructura de interpretación “Finer Logic of Inquiry Model”, reelaboración de Arzarello de la “Logic of Inquiry” (Lógica de la Investigación) de Jaakko Hintikka.

Se exponen distintos resultados acerca de:

1. La frecuencia y la modalidad de uso de distintas estrategias de resolución y en particular aquellas referidas al razonamiento regresivo en distintos problemas y juegos.
2. La elaboración de perfiles de razonamiento de estudiantes y propuestas didácticas.

Palabras clave:

Heurística, Juegos de estrategia, Resolución de problemas, Razonamiento regresivo, Didáctica de las matemáticas, Pensamiento Matemático.

ABSTRACT IN ENGLISH

Motivated by the increasing development of the use of games as a teaching tool for the development of problem solving processes and concerned for the difficulties of secondary school students in typical learning processes of mathematical thinking, a study has been selected in which the main theme is the analysis of the heuristic processes that develop both in the approach to strategy games and in problem solving.

The aim in this research is to deepen the backwards reasoning by exploring the heuristic procedures that that students use when solving open mathematical problems.

The study group consist of 22 students in the 4th year of Educación Secundaria Obligatoria (ESO) who enrolled in the optional course titled Ampliación de Matemáticas in a Secondary School of the Comunidad de Madrid. The research is framed on a qualitative study based on a teaching experiment using problems and strategy games. From the analysis of the protocols, questionnaires and semi-structured interviews, a global analysis and group case study was carried out. Inductive data analysis has been carried out through the methodological frame of interpretation "*A Finer Logic of Inquiry Model*", a reworking by Ferdinando Arzarello of the "Logic of Inquiry" by Jaakko Hintikka.

We describe different types of results relating to:

1. The frequency and effectiveness in the use of different solution strategies, particularly the backwards reasoning, in various problems and games;
2. The creation of some students' reasoning profiles and educational proposals.

Key words:

Heuristic, Strategy games, Problem Solving, Backwards Reasoning, Didactic of Mathematics, Mathematical thinking

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

1.1 MOTIVACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de la investigación que se presenta en este Trabajo de Fin de Master es el estudio de los procesos heurísticos que se desarrollan en la resolución de problemas y en la resolución de los juegos de estrategia con una atención particular al desarrollo de la estrategia del razonamiento regresivo.

Desde la segunda mitad del siglo XX le resolución de problemas como propuesta de enseñanza-aprendizaje ha sido uno de los áreas más desarrollados en educación matemática (Polya, 1965; Schoenfeld, 1985, 1992, 2007 y 2013; Mason, Burton y Stacey; 1982; Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2013). Un desarrollo más reciente trata sobre la utilización de los juegos en la didáctica (Garris, 2002; Kiili, 2005; Shute, 2011) y en particular de la didáctica de las matemáticas (Martignone y Sabena, 2014; Gómez-Chacón, 1992 y 2005; Gómez-Chacón, Barbero y Arzarello, 2016, De Guzmán 1984a y 2000).

La importancia de abordar el tema de juegos de estrategia en la resolución de problemas radica en el hecho de que los actuales currículos de matemáticas (LOGSE, 1990; LOE, 2006; LOMCE, 2013) acentúan la resolución de problemas como una de las competencias principales que conforman la competencia matemática. Estamos de acuerdo con Gómez-Chacón (1992. p.7) cuando indica que: "los juegos de estrategia como elementos claves en este proceso y usarlos, no sólo para introducir contenidos, sino también, y muy especialmente, para favorecer distintos aspectos (procesos, fases…) de la resolución de problemas, así pues constituyen un instrumento metodológico importante para su enseñanza".

La relación entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas radica en el hecho de que, potencialmente, ambos comparten el mismo proceso heurístico. Gómez-Chacón, (1992) afirma que las fases de resolución de ambos coinciden. La analogía de esta estructura permite utilizar los mismos instrumentos y procedimientos necesarios para el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático. En el capítulo 2 de esta memoria se compararán procedimientos y estrategias utilizadas tanto en resolución de problemas como en juegos en el grupo de experimentación con estudiantes de Secundaria.

Una de las técnicas que comúnmente se pueden utilizar para la resolución de problemas y los juegos de estrategias es aquella vinculada al razonamiento regresivo (vuelta atrás, reducción al absurdo). Corbalán (1994 e 1997) afirma que la mayoría de los estudiantes de Secundaria y Bachillerato considera el uso del razonamiento regresivo, en contextos matemáticos, como una “técnica artificiosa”, que se puede aplicar solamente en los casos particulares vistos el aula y que sólo demuestra algo que ya ha sido demostrado. El alumnado no sabe cuándo, cómo y porqué utilizarlo, no entiende el mecanismo general lo que les lleva a memorizar sólo técnicas utilizadas en los casos presentados por el profesor en el aula sin considerarla un procedimiento general que ellos autónomamente pueden utilizar.

Estos resultados, junto con nuestro interés por propuestas que mejoren la enseñanza de la matemática, nos llevan a preguntarnos si el uso de los juegos de estrategia puede mejorar la actitud y hábitos de pensamiento de los estudiantes hacia esta técnica de resolución y consecuentemente la capacidad de utilizarla autónomamente.

1.2 PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS Y CONTEXTO

La investigación que se presenta en este trabajo tiene un carácter de exploración e intenta contestar a la cuestión explicitada en los párrafos anteriores. Este estudio ha tenido unos antecedentes en un proyecto de investigación más amplio sobre el Pensamiento Matemático y la Resolución de Problemas en enseñanza universitaria y formación de profesores realizado con la Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid y vinculado al Programa de Investigación en Educación Matemática Universitaria (INVEDUMAT_uni) del Instituto de Matemática Interdisciplinar. (Gómez-Chacón, en prensa; Gómez-Chacón, Barbero, Arzarello, 2016)

La hipótesis de partida del presente estudio es la siguiente:

H: Las estrategias de razonamiento regresivo son utilizadas por los estudiantes con más frecuencia en la resolución de los juegos de estrategias que en la resolución de problemas.

Los objetivos generales de nuestra investigación han sido:

O1: Explorar los procedimientos heurísticos que desarrollan estudiantes de Secundaria en la resolución de juegos de estrategias y en la resolución de problemas matemáticos abiertos.

O2: Analizar, con el modelo metodológico de interpretación “A Finer Logic of Inquiry Model” (FLIM), el desarrollo del pensamiento estratégico en la búsqueda de una estrategia ganadora por parte de los estudiantes en juegos de estrategias y problemas abiertos.

Para alcanzar estos objetivos generales nos centramos en las cuestiones siguientes:

- ¿Qué estrategias se desarrollan en la resolución de los problemas y de los juegos propuestos?
- ¿Dónde se desarrollan mayormente las estrategias de razonamiento regresivo en la resolución de los problemas o en los juegos de estrategias?
- ¿Cuáles son las trayectorias lógicas que llevan al desarrollo de la estrategia ganadora?

Precisando los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el desarrollo de las estrategias de resolución en los problemas y en los juegos propuestos, en particular:
    a. Identificar qué estrategias específicas se desarrollan en las diferentes resoluciones;
    b. Establecer similitudes y diferencias en el uso de estrategias en la resolución de los problemas y de los juegos propuestos.
2. Analizar en profundidad el uso del razonamiento regresivo.
3. Analizar las trayectorias de pensamiento que llevan a la formulación de una estrategia ganadora.

La investigación ha sido llevada a cabo con un grupo de 22 alumnos del 4 de ESO que cursan la asignatura optativa Ampliación de Matemáticas en un Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) de la Comunidad de Madrid.

Se ha planteado un experimento de enseñanza mediante la resolución de problemas y de juegos de estrategias. Se ha hecho uso del desarrollo de protocolos de resolución de dos juegos y dos problemas y la aplicación de cuestionarios para cada uno de ellos con objeto de obtener suficientes datos que nos permitan una comparación y diagnóstico entre ambos. La metodología utilizada es cualitativa a partir de los análisis de los protocolos y de los cuestionarios, desarrollando un análisis global y un estudio de casos (ver Capítulo 2: Metodología).

La investigación ha sido organizada en dos fases:

- ***Fase 1: Estudio del grupo***

  Para analizar el desarrollo de las estrategias se proponen a los estudiantes dos problemas y dos juegos de estrategias, a resolver a través de protocolos, donde una de las posibles estrategias de resolución es la estrategia de vuelta atrás.

- ***Fase 2: Estudio de casos***

  Para profundizar en cómo los estudiantes hacen uso de distintas estrategias de resolución y en particular las de vuelta atrás se ha realizado un estudio de casos, presentándose en esta memoria las actuaciones y comportamiento de dos estudiantes. En el estudio de casos se hace uso de una entrevista estructurada; ésta consta de una serie de preguntas que permiten obtener informaciones detalladas sobre el desarrollo de los protocolos de resolución y sobre las dificultades de los estudiantes.

El análisis cuantitativo de los datos ha sido llevado a cabo a través de gráficas y tablas de resumen, mientras que el análisis cualitativo ha sido de tipo inductivo, realizado mediante el uso de la estructura de interpretación “Finer Logic of Inquiry Model”, (FLIM) reelaboración de Arzarello de la “Logic of Inquiry” (Lógica de la Investigación) de Jaakko Hintikka. Arzarello (2014) (ver Capítulo 3: Resultados).

En esta memoria, después de un primer capítulo (Capítulo 2) que sitúa antecedentes y marco teórico sobre Resolución de Problemas, a la importancia de su uso en la didáctica y a su analogía en los procesos heurísticos con los juegos de estrategia, se describe la metodología de investigación utilizada (Capítulo 3) y los resultados obtenidos en la investigación (Capítulo 4). Por último, la memoria termina con las conclusiones, algunas implicaciones didácticas, y las perspectivas de futuro de esta investigación (Capítulo 5).

2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

Al final de los años ‘60, algunos investigadores motivados por Polya (1945, 1954) realizaron estudios sobre la identificación de las técnicas heurísticas en resolución de problemas utilizadas por los estudiantes en los EE.UU. Los primeros estudios, a través de experimentos de enseñanza, se centraron en las correlaciones entre los usos de las distintas estrategias de resolución y en las características de los sujetos que resolvían con éxito los problemas. Estudios posteriores a través de la metodología de estudios de casos caracterizaron tipologías de procesos de resolución de problemas y su impacto en el éxito de la solución.

A partir de los años ’80 se empezó a sostener que el proceso de resolución de problemas involucra elementos meta-cognitivos (Schoenfeld, 1985), es decir, componentes de carácter emocional, afectivo, psicológico y sociocultural. Schoenfeld (1985) sostiene que, además de los conocimientos previos y de las estrategias heurísticas, en la resolución intervienen también estrategias meta-cognitivas, es decir, el modo en que los sujetos utilizan los conocimientos y las estrategias heurísticas que conocen, y lo que él denomina “sistema de creencias”, es decir, aquellas ideas, comportamientos y actitudes que los estudiantes desarrollan y tienen acerca de la matemática y de su enseñanza. Se empieza entonces a estudiar la resolución de problemas en contextos socio-culturales. Estas investigaciones mostraron que las estrategias heurísticas generales se pueden descomponer en familias de estrategias más específicas, y que con una instrucción adecuada, los estudiantes pueden aprender a emplear esas estrategias.

Se empezó entonces, no sólo en EE.UU. sino en distintos países, entre ellos España, a insertar en los currículos de matemáticas la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento como objetivos importantes de la instrucción (Ver Ley LOGSE, 1990; LOE, 2006 y LOMCE, 2013). Esta incorporación curricular propició que los investigadores desarrollaran experimentos de enseñanza. La observación de los ambientes de aprendizaje ha dado lugar a avances metodológicos y conceptuales con el desarrollo una serie de herramientas, técnicas e ideas para la caracterización de los mecanismos de interacción entre los sujetos y el ambiente en el cual están inmersos. (Schoenfeld, 2007)

No obstante, estos estudios nos han dejado algunas cuestiones sin resolver a las que este Trabajo de Fin de Máster quiere contribuir. Éstas son las siguientes:

- ¿Qué tipo de actividades prácticas favorecería en los estudiantes el aprendizaje de un mayor número de estrategias de resolución de problemas?

- ¿Cómo y por qué las personas hacen las elecciones que hacen durante la resolución?

2.1 HEURÍSTICAS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

"Un problema es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y hay que poner a punto relaciones nuevas." – Torres Segura (2006)

Diferentes autores han trabajado sobre las fases de resolución de problemas (Polya 1945; Mason, Burton y Stacey 1982; De Guzmán 1984a y 1991), entendiendo por problema lo que afirma Torres Segura en su artículo. Polya, en su obra "How to solve it?" (1945), especifica cuatro etapas fundamentales para la resolución de problemas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan para resolverlo.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

En la primera fase el sujeto estudia el problema reflexionando y buscando conexiones con algunos conocimientos previos que pueden ayudar en la resolución; es muy importante, en particular cuando la formulación del problema no es estrictamente matemática. La segunda y la tercera fase pueden aparecer alternativamente distintas veces durante la resolución: como el pensamiento, el camino de resolución no es lineal y no es lo mismo para todos los sujetos. Durante la resolución se pueden evidenciar continuos pasos entre el planteamiento del plan, y las respectivas estrategias, y la ejecución del mismo, debido a los cambios que suelen hacerse en el plan original para lograr alcanzar la solución. La última fase consiste en la confrontación de los resultados obtenidos con la realidad y permite generalizarlos, evaluarlos y averiguar que sean correctos.

Mason, Burton y Stacey en "Thinking Mathematically" (1982) especifican, en cambio, tres fases fundamentales para la resolución de problemas: Entrada, Ataque, Revisión.

La primera etapa es aquella en la cual el sujeto estudia el problema y se pregunta ¿Qué sé del problema? y ¿Qué quiero obtener a partir de estos datos?, empezando en seguida a introducir imágenes, representaciones y una notación para comenzar a resolver el problema. La segunda fase es la más compleja y es aquella en la cual el sujeto plantea estrategias de resolución y las aplica, esta fase está caracterizada por un "movimiento adelante-atrás" en la resolución según el sujeto encuentra dificultades u obstáculos y vuelve hacia la primera fase o logra obtener una estrategia ganadora que lleva al sujeto hacia la tercera fase. En la última fase el sujeto cumple una revisión de la resolución desarrollada, una reflexión sobre las ideas claves que ha utilizado y una generalización a contextos más amplios.

Se observa que si se considera la fase de ataque de la teoría de Mason como el conjunto de la segunda y tercera fase de la teoría de Polya, las dos teorías se pueden solapar poniendo en correspondencia las distintas fases según la tabla 2.1. Se puede decir que en ambas teorías los sujetos siguen un proceso de particularización desde la primera fase hacia la segunda y uno de generalización desde la penúltima hacia la última. Mientras que en la fase central hay una alternancia entre conjeturas y justificaciones.

Polya (1945)	**Procesos**	**Mason, Burton y Stacey (1982)**
1. Comprender el problema		1. Entrada
	Particularizar	
2. Concebir un plan para resolverlo	Conjeturar	2. Ataque
3. Ejecutar el plan	Justificar	
	Generalizar	
4. Examinar la solución obtenida		3. Revisión

Tabla 2.1 – Correspondencia fases de resolución entre Polya y Mason, Burton y Stacey

Forman parte de la heurística, o sea de la "ciencia del descubrimiento", diferentes técnicas de resolución. Estas estrategias han sido clasificadas a lo largo de la historia distinguiendo las diferentes maneras de proceder en la resolución de problemas. Se recopila un listado de estrategias reelaborando las obras de Polya (1945) y Corbalán (1994 e 1997): Analizar los casos límite, Deducir y sacar conclusiones, Descomponer el problema en pequeños problemas. (Simplificar); Empezar por lo fácil, resolver un problema más sencillo; Ensayo-Error; Experimentar y extraer pautas. (Inducir); Hacer conjeturas; Manipular y experimentar manualmente; Principio del Palomar; Realizar dibujos y representaciones gráficas; Realizar esquemas y tablas; Realizar un estudio sistemático de todos los casos. (Recuento); Reformular el problema; Resolver problemas análogos; Sacar partido de la simetría; Seguir un método, organizarse; Suponer que no. (Reducción al absurdo); Utilizar el razonamiento regresivo. (Empezar por el final - Suponer el problema resuelto); Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico.

2.1.1 EL RAZONAMIENTO REGRESIVO

Como afirman Gómez-Chacón, Barbero y Arzarello (2016), el razonamiento regresivo forma parte de las posibles estrategias de resolución de problemas, es conocido en literatura por distintas denominaciones: estrategia de vuelta atrás, estrategia de suponer el problema resuelto, estrategia de empezar por el final o método de análisis. Practicar esta técnica conlleva hacer un cierto número de razonamientos en orden inverso que permiten obtener la solución del problema: se comienza desde el final de la cuestión, desde la solución, y se vuelve hasta el comienzo a través de una serie de razonamientos que permiten encontrar la solución deseada.

Se puede considerar esta estrategia de dos diferentes maneras: se puede suponer el problema resuelto e ir sacando conclusiones hasta llegar a una hipótesis verificada o bien se puede empezar por el final del problema y regresar con los razonamientos hasta el comienzo.

Aunque se considera a Platón como el que formuló el método de Análisis en términos generales, el matemático que ha contribuido de manera sustancial a su aclaración y ejemplificación ha sido Pappus. En el séptimo libro de su Collectiones trata el tema de la Heurística (Analyomenos) o sea de los métodos para resolver los problemas. En estas páginas ejemplifica tan el método de análisis como el de síntesis, haciendo así más claro el desarrollo de estos razonamientos. “En el análisis”, afirma Pappus, “partiendo de lo que es requerido, lo consideramos como admitido, sacamos las consecuencias, después las consecuencias de dichas consecuencias, hasta llegar a un punto que podamos utilizar como punto de síntesis. Pues en análisis admitimos como ya hecho lo que nos piden que hagamos, como encontrado lo que buscamos, como verdadero lo que hay que demostrar” (tomado de Polya, 1965). Y un poco más adelante señala: “Dicho proceso lo llamamos análisis, solución hacia atrás o razonamiento regresivo.” (tomado de Polya, 1965) Y sucesivamente: “En la síntesis, por el contrario, invirtiendo el proceso, partimos del último punto alcanzado en el análisis, del elemento ya conocido o admitido como cierto. Deducimos lo que en el análisis le precedía y seguimos así hasta que, volviendo sobre nuestros pasos, llegamos finalmente a lo que se nos pedía. Dicho proceso lo llamamos síntesis, solución constructiva o razonamiento progresivo.”

2.2 La resolución de problemas en el aula: Modelos de aprendizaje

"La resolución de problemas constituye un eje fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico." (Decreto n° 48, 2015 (en BOCM))

A través de la resolución de problemas se quiere poner el acento, además de en los contenidos, en los procesos mentales típicos del pensamiento matemático. Según De Guzmán (1992), "se trata de considerar como lo más importante: que el alumno manipule los objetos matemáticos; que active su propia capacidad mental; que ejercite su creatividad; que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente; que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental; que adquiera confianza en sí mismo; que se divierta con su propia actividad mental; que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana; que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.".

La corriente constructivista, a la cual pertenece Piaget, señala que el sujeto implicado en la actividad de aprendizaje tendría que tener un papel activo en ésta de manera que su acceso a los conocimientos se cumpla a través de manipulaciones concretas y estando involucrado directamente en la actividad de aprendizaje. Mientras los estudiantes están resolviendo un problema están involucrados en el proceso de desarrollo de la actividad; si esto no es un simple ejercicio de rutina en el cual hay solamente que aplicar unas formulas sino es un problema según la definición que propone Torres Segura (2006), el estudiante puede aprender el conocimiento que está implicado en el problema propuesto construyendo autónomamente el concepto al resolver el problema. Una situación problema, para ser eficaz, tendría que permitir al estudiante, al comienzo, aplicar conocimientos conocidos, que muy pronto le resultan insuficientes para la resolución y en un segundo momento, después de la comprensión de escasez de su saber, permitir al alumno construir nuevos conocimientos. (Gómez-Chacón, 2015)

En general la resolución de un problema puede ser concebida como método o como contenido de enseñanza. Puede aportar dos tipos de conocimientos: por un lado los conocimientos disciplinares, como pueden ser las diferentes características de los números que señalan Carrillo y Contreras (1997), y por otro lado las destrezas básicas, los procedimientos típicos de las matemáticas, es decir, las estrategias de resolución.

Aprender resolviendo problemas es aplicar, reforzar o establecer conocimientos y procesos adquiridos anteriormente, pero también es construir, a través de la resolución, conceptos nuevos descubiertos por sí mismo. Uno de los aspectos que caracterizan las matemáticas según Schoenfeld (1992) es el hecho que se puede pensar como "ciencia de los patrones". A este propósito Santos Trigo (2008) en su artículo propone los temas generales para caracterizar las matemáticas que selecciona Devlin en su obra de 1994 *Mathematics the science of patterns*:

1. "Patrones numéricos que implican el reconocimiento de propiedades de colecciones de números;
2. Patrones de razonamiento y comunicación que incluyen procesos de argumentación y prueba;
3. Patrones de movimiento y cambio donde las matemáticas proveen los objetos (números, puntos, líneas, ecuaciones, gráficas, etc.) para estudiar fenómenos en movimiento;
4. Patrones entre figuras o formas geométricas que permiten identificar y examinar propiedades de colecciones de esas figuras;
5. Patrones de simetría y regularidad que permiten capturar relaciones profundas o abstractas de las figuras u objetos;
6. Patrones de posición donde interesa analizar y describir patrones de acuerdo a su posición y no tanto bajo la consideración de sus propiedades geométricas."

Resolviendo problemas los estudiantes interactúan con los contenidos matemáticos y en particular con estos patrones, identificándolos y conjeturando sobre ellos mientras representan, describen o resuelven la actividad.

Considerar los problemas como contenido de la enseñanza, significa que a través de esta herramienta los estudiantes pueden aprender estructuras cognitivas, habilidades y técnicas matemáticas transversales que son útiles para aprender a pensar, desarrollar una actitud abierta y crítica y pueden ser utilizadas más allá de los contenidos de la materia. Los objetivos de esta metodología de enseñanza son entonces desarrollar en los estudiantes destrezas de pensamiento para resolver problemas, desarrollar habilidades para seleccionar y utilizar estrategias de resolución de problemas, favorecer en los estudiantes actitudes y creencias que ayuden a resolver problemas, desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar sus conocimientos matemáticos, de controlar y evaluar su pensamiento mientras resuelven, de resolver problemas en grupo, de encontrar la repuesta correcta a diferentes tipos de problema y favorecer el conocimiento propio de cada estudiante. (Gómez-Chacón, 2015)

Una de las grandes ventajas del uso de problemas en el aprendizaje es que estos pueden ser estructurados y propuestos en diferentes niveles. El mismo problema, propuesto a un grupo o a otro puede ayudar a desarrollar destrezas y conocimientos diferentes. Además proponiendo un problema a un grupo de iguales (con misma edad y camino escolar) se puede atender a todos los estudiantes, también a aquellos que necesitan una diversificación en la programación escolar. El problema, de hecho, por sus características fundamentales presenta la posibilidad de ser resuelto de diferentes maneras y utilizando distintas estrategias según el propio estilo.

2.3 COMPARACIÓN DE LA HEURÍSTICA DE LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA CON AQUELLA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La actividad de juego propone situaciones en las cuales el desarrollo de investigaciones que se actúan para encontrar la solución es muy parecido a aquello que se utiliza tratando temas matemáticos. En particular hay una fuerte analogía entre el diseño y la realización de los juegos de estrategia y la resolución de problemas (Corbalán, 1994 e 1997; Gómez-Chacón, 1992). Intentando elegir cual es la mejor manera de jugar el sujeto se esfuerza en realizar un razonamiento de tipo lógico que lleva a pensar matemáticamente: se activan entonces procesos mentales como la lectura y la interpretación de datos, la representación, la formulación de conjeturas, la selección de estrategias de resolución y la evaluación de dichas estrategias análogamente a lo que ocurre en la resolución de problemas. Observando las dos resoluciones se puede comprobar que las estrategias que se desarrollan son las mismas, además estas coinciden heurísticamente, es decir, coinciden a nivel de los procesos de pensamientos activados para el logro de la solución. Por esto muchas habilidades matemáticas se pueden adquirir a través del juego. (Gómez-Chacón, 1992).

También en la resolución de los juegos de estrategia se encuentra una secuencia de cuatro fases que podemos esquematizar de esta manera (De Guzmán, 1984a; Gómez-Chacón, 1992):

1. Familiarización con el juego: antes de hacer, tratar de entender.
2. Exploración inicial: tramar una estrategia, o varias.
3. Ejecución de la estrategia: mirar si la estrategia lleva al final.
4. Reflexión sobre el camino seguido: generalización de la estrategia desarrollada.

Entender bien los componentes y las reglas del juego, característica de la primera fase, es fundamental para el conseguimiento de la solución: estas informaciones son útiles para el desarrollo y el análisis de las estrategias de resolución. En la segunda fase se desarrollan las posibles estrategias buscando conexiones con elementos ya encontrados anteriormente mientras que en la tercera se ejecutan estas técnicas y se averigua si llevan a una solución. Como en toda la resolución de problemas también aquí la segunda y la tercera fase a menudo se repiten alternativamente en su desarrollo para lograr alcanzar la solución utilizando distintas estrategias. La última fase es una reflexión sobre el trabajo hecho y permite asimilar la experiencia razonando sobre la generalidad de las técnicas utilizadas.

La analogía entre los dos procesos de resolución ha sido identificada por Gómez-Chacón en su trabajo del 1992 donde se resume en una tabla (Tabella 2.2) los dos procesos heurísticos.

	HEURÍSTICA	
de la resolución de problemas		***de los juegos de estrategia***
Comprender qué piden, qué encontrar, qué datos tengo.	**1. LEER EL PROBLEMA O LAS REGLAS DEL JUEGO**	Comprender los requisitos, los movimientos, cómo se gana.
¿Existe un problema análogo cuya solución conozco? Formular todas las conjeturas. Seleccionar algunas estrategias.	**2. EXPLORAR**	¿He jugado a algún juego similar? Seleccionar posibles estrategias.
Examinar la validez de cada conjetura.	**3. LLEVAR A CABO LA ESTRATEGIA**	¿Qué movimientos de ataque u oposición hacen que el juego progrese?
Si has resuelto el problema, ¿por qué se trata de una estrategia general? ¿Puedes usar esta estrategia en otros problemas?	**4. COMPROBAR LOS RESULTADOS**	Si la estrategia seleccionada es siempre ganadora, ¿es una estrategia general? ¿Funciona esta estrategia con otros juegos y otros oponentes?

Tabla 2.2. – Analogía entre los procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia

En la experimentación se exploran los procesos heurísticos que se desarrollan en los problemas y en los juegos de estrategias; en particular queremos demostrar que utilizando un juego es más sencillo entender que es el razonamiento regresivo y que esta técnica, muchas veces reduce la complejidad del problema inicial.

3 METODOLOGÍA

3.1 ÁMBITO DE INVESTIGACIÓN

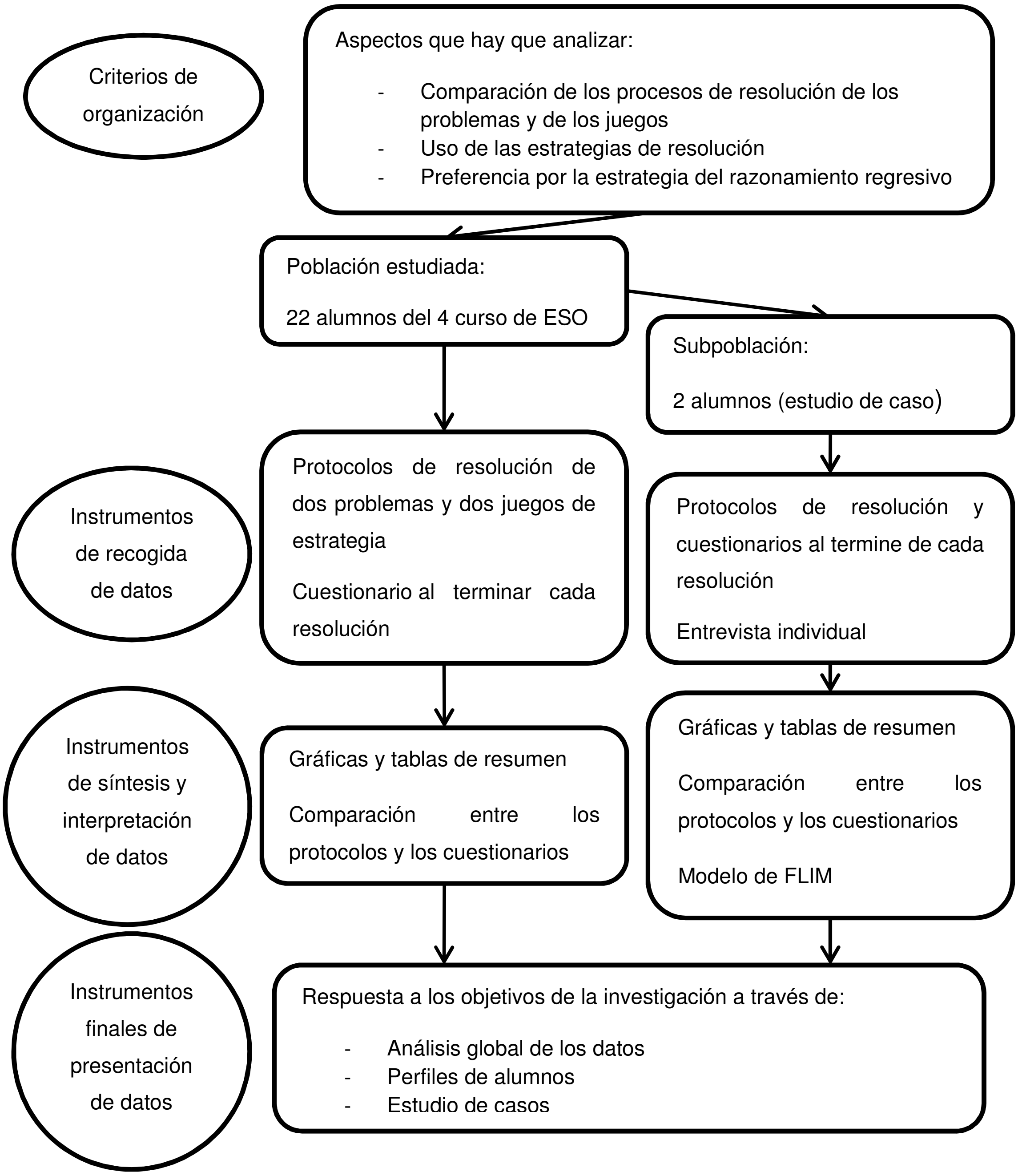
El grupo, objeto del estudio, está compuesto por 22 alumnos de edad comprendida entre los 15 y los 17 años, de los cuales 11 chicas y 11 chicos. Estos cursan la asignatura Ampliación de Matemáticas que es una de las asignaturas optativas en la oferta formativa para los estudiantes del 4° curso de ESO en el instituto donde se ha desarrollado la investigación. Los alumnos tienen los conocimientos adquiridos en los primeros tres años de ESO. El rendimiento de los estudiantes involucrados en la investigación es heterogéneo. Son todos alumnos que cursan la opción A de matemáticas excepto uno que cursa la opción C; hay un único alumno con las matemáticas pendientes del tercer curso y otro alumno al cual han diagnosticado un déficit de atención con hiperactividad.

3.2 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La investigación está basada en un estudio de tipo cualitativo y cuantitativo; el análisis de los datos ha sido principalmente de tipo inductivo. La estrategia metodológica de investigación se apoya en un experimento de enseñanza y en el estudio de casos. Para el experimento de enseñanza se han utilizado los protocolos de resolución de dos problemas y de dos juegos de estrategia y un cuestionario sobre cada resolución. Para el estudio de casos también se han desarrollado entrevistas estructuradas. Este estudio nos ha permitido explorar en profundidad las técnicas de resolución utilizadas por los estudiantes y en particular el uso de la estrategia del razonamiento regresivo.

En la elaboración de los instrumentos de investigación distinguimos cuatro niveles:

1. Primer orden: Instrumentos de recogida de los datos.
2. Segundo orden: Criterios de organización de la información.
3. Tercer orden: Instrumentos de síntesis de la información.
4. Cuarto orden: Instrumentos de presentación de la información.



3.3 DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Para la realización de este trabajo se ha autorizado el uso de distintos instrumentos utilizados previamente en otras investigaciones (Gómez-Chacón, 2014 y Gómez-Chacón, prensa).

3.3.1 PROTOCOLOS DE RESOLUCIÓN INDIVIDUALES

Se presentaron al grupo de estudio dos problemas y dos juegos de estrategias que elegimos de acuerdo con el objetivo de nuestra investigación. Se pedí a los alumnos resolver ambos problemas y juegos a través de protocolos de resolución. El protocolo está dividido por la mitad de manera que en una parte describen la resolución y en la otra los procesos mentales que les guían a lo largo de la resolución.

3.3.1.1 Los problemas

Problema 1: Alubias rojas y blancas

“En un saco blanco tienes unas 2000 alubias blancas y en otro rojo unas 3000 rojas. Del saco blanco pasas al rojo 50 alubias. Revuelves bien y sacas del saco rojo 50 alubias que, sin mirarlas, metes en el saco blanco. Revuelves las alubias de este saco blanco y repites la operación, ahora con 100 alubias (es decir, pasad del blanco al rojo 100 revuelves y pasas del rojo al blanco también 100). Repites una tercera vez la operación, ahora con 150 alubias. ¿Habrá al final más alubias blancas en el saco rojo que alubias rojas en el saco blanco o al revés?”

Problema 2: Caminos

“¿Cuántos caminos consistentes en una sucesión de segmentos horizontales y/o verticales se pueden contar en la figura adjunta (donde hemos indicado un posible camino) (Imagen 4.1) de manera que cada segmento una un par de números consecutivos, para formar, desde el principio del camino hasta el final, el número 1234567?”

Imagen 4.1 – Figura adjunta al Problema 2: Caminos

Se adjunta en el Anexo I una posible solución de los dos problemas utilizando el razonamiento regresivo.

3.3.1.2 Los juegos de estrategias

En esta investigación han sido utilizados dos juegos de estrategias: el Solitario Triangular y el Solitario de la Bastilla. Los hemos elegido porque han sido aplicados en experimentaciones anteriores para introducir distintos procesos heurísticos de resolución de problemas con estudiantes de Secundaria y Bachillerato (Gómez-Chacón, 1988 e 1992). En particular el Solitario Triangular ha sido utilizado por Gómez-Chacón en algunas investigaciones sobre la resolución de problemas y el desarrollo del proceso heurístico del razonamiento regresivo con estudiantes de ESO y Bachillerato y por Corbalán (Corbalán, 1994 e 1997) con estudiantes de la ESO.

Como para todos los juegos de estrategias el uso de los solitarios en la didáctica de las matemáticas tiene un fuerte impacto sobre el desarrollo de los procesos típicos del pensamiento matemático y sobre las habilidades específicas necesarias en la resolución de problemas. Además, siendo solitarios tienen la ventaja de favorecer el pensamiento individual y el desarrollo autónomo.

Juego 1: El Solitario Triangular

El primer juego propuesto fue el Solitario Triangular (Gómez-Chacón, 1992) para una sola persona, necesita de un tablero con 15 casillas come se muestra en la imagen 4.2.

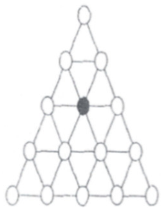


Imagen 4.2 – Tablero del Solitario Triangular con pintado en negro la casilla vacía al comienzo del juego

Se procede del modo siguiente:

Se colocan las fichas en todas las casillas, excepto en aquella marcada en negro.

El jugador/a puede mover tantas fichas como posibilidades tenga de saltar por encima de otra, adyacente a una casilla vacía (a lo largo de la línea); al mismo tiempo se "come" y se retira del tablero la ficha sobre la que se ha saltado. Todas las fichas se moverán de este modo. Las fichas pueden moverse por todo el tablero.

El juego se gana cuando queda una sola ficha.

Juego 2: Solitario de la Bastilla

Es un juego para una sola persona. Necesita de un tablero con 33 casillas come se muestra en la imagen 4.3.

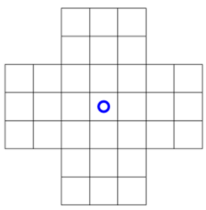


Imagen 4.3 – Tablero del Solitario de la Bastilla con señalada la casilla que tiene que estar vacía al comienzo del juego y contener la última ficha para ganarlo

Se procede del modo siguiente:

1. Se colocan las fichas en todas las casillas, excepto en una que suele ser la central.
2. El jugador/a puede mover tantas fichas como posibilidades tenga de saltar por encima de otra, adyacente a una casilla vacía (a lo largo de la línea o de la columna, nunca en diagonal); al mismo tiempo se “come” y se retira del tablero la ficha sobre la que se ha saltado. Todas las fichas se moverán de este modo. Las fichas pueden moverse por todo el tablero.

El juego se gana cuando queda una sola ficha en la casilla central.

Las posibles estrategias de resolución de los solitarios son:

i. Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico.
ii. Sacar partido de la simetría.
iii. Ensayo-Error.
iv. Experimentar y extraer pautas. (Inducir)
v. Empezar por lo fácil, resolver un problema más sencillo.
vi. Descomponer el problema en pequeños problemas. (Simplificar)
vii. Utilizar el razonamiento regresivo.

A las cuales podemos añadir otras estrategias de ayuda para la resolución:

viii. Hacer conjeturas.
ix. Manipular y experimentar manualmente.
x. Realizar dibujos y representaciones gráficas.

Se desarrolla en detalle el estudio previo de estas estrategias en el Anexo II.

El Solitario Triangular ha sido propuesto individualmente, dando a los estudiantes los tableros de la imagen 4.2 en papel. Para el Solitario de la Bastilla, además del tablero de la imagen 4.3 en papel, se ha dado la posibilidad a los estudiantes de trabajar en pareja y utilizar ordenadores en el Aula Informatizada del Centro, para jugar a una de las versiones del juego que se encuentra on-line a través de la página web http://www.coolmath-games.com/0-pegsolitaire.

3.3.1.3 Tiempo de resolución

Los dos problemas y los dos juegos han sido propuestos en cuatro sesiones de clases distintas, durante el horario escolar dedicado a la asignatura Ampliación de Matemáticas. El tiempo a disposición para resolverlos ha sido entonces de 55 minutas para cada problema. La delimitación de este tiempo ha sido determinada por un lado desde la limitación horaria de las clases en el Centro y por el otro lado desde el hecho que no son necesarios más de 15-20 minutos para familiarizar con el problema y empezar el proceso de resolución aplicando las distintas estrategias. Después de 55 minutos se debería tener un plan de desarrollo con las distintas estrategias, incluido si no son ganadoras.

3.3.2 CUESTIONARIO AL TERMINAR LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Al terminar la resolución de los dos problemas y de los dos juegos hemos propuesto un Cuestionario relativo a la resolución de cada problema (ver Anexo III). El objetivo de este cuestionario es indagar sobre el proceso de resolución del problema. El cuestionario está formado por 8 preguntas: 2 relativas a las dificultades encontradas en la resolución del problema, una relativa a las estrategias utilizadas, 4 relativas al uso del razonamiento regresivo y una relativa a las emociones experimentadas y a los procesos mentales.

3.3.3 ENTREVISTAS INDIVIDUALES

A partir del análisis de los protocolos de resolución de los problemas han sido seleccionados para la presentación en esta memoria 2 estudiantes para el estudio de casos. La entrevista a los dos sujetos ha sido estructurada mediante una serie de preguntas (Anexo IV) que han permitido obtener informaciones detalladas sobre el desarrollo de los protocolos de resolución y las dificultades en su realización, y sobre la actitud hacia los juegos y a su uso en la enseñanza. Las entrevistas han tenido una duración de unos 30 minutos cada una y han sido video-grabadas.

El análisis de los protocolos de resolución nos ha permitido establecer una serie de perfiles (ver apartado 3.4.1) que han sido definidos alrededor del uso de la estrategia del razonamiento regresivo en las distintas resoluciones. Una vez identificados los perfiles se ha identificado cada estudiante con uno de estos; para el estudio de caso se han seleccionado dos estudiantes que representaban dos de los perfiles definidos y que hubiesen redactado los protocolos con un desarrollo detallado de las estrategias.

3.4 ESTRATEGIAS DE ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis de los datos se ha realizado durante todo el proceso de experimentación tratando los datos según las siguientes fases:

1. Análisis cuantitativo de los Protocolos de resolución y de los Cuestionarios.
2. Análisis cualitativo de los Protocolos de resolución de los estudiantes seleccionados para el estudio de casos.
3. Análisis de las entrevistas individuales. Análisis conjunta de las informaciones para el estudio de casos.

3.4.1 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS DE LOS PROTOCOLOS DE RESOLUCIÓN

Para el examen de los protocolos de resolución hemos optado por un doble análisis: uno de carácter cuantitativo, a través de tablas de frecuencia y porcentaje de las estrategias utilizadas por los estudiantes, otro de carácter cualitativo a través el uso de la Finer Logic of Inquiry Model (FLIM).

Se ha empezado el análisis cuantitativo realizando un examen detallado de los protocolos de resolución con dos metodologías distintas: la primera, problema por problema, nos ha permitido establecer los porcentajes de utilización de las distintas estrategias, la segunda, alumno por alumno, nos ha permitido observar el uso repetitivo de algunas estrategias en las distintas resoluciones.

Desde el primer análisis se ha podido obtener una clasificación de las estrategias en base a los porcentajes de uso; para hacerlo se ha tenido en cuenta el número de estudiantes que han utilizado una estrategia específica en la resolución de los dos problemas y de los juegos comparándolo con el número de estudiantes que han participado en la resolución de cada problema.

En el segundo análisis se ha podido identificar qué estrategias han sido utilizadas repetidamente por el mismo estudiante en la resolución de los distintos problemas. En particular se han podido establecer 4 perfiles basándonos en el uso de la estrategia del razonamiento regresivo en los distintos protocolos de resolución:

P1. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo en problemas y juegos.

P2. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo solamente en la resolución de los problemas.

P3. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo solamente en la resolución de los juegos.

P4. Estudiante que nunca utiliza el razonamiento regresivo.

El análisis cualitativo se limita al análisis de protocolos y entrevistas. Como estructura metodológica de interpretación de los protocolos se utiliza la Finer Logic of Inquiry Model (FLIM) (Arzarello, 2014; Soldano & Arzarello, 2016). A continuación se describe brevemente.

3.4.1.1 A Finer Logic of Inquiry Model

Para realizar la síntesis que se presenta aquí de este modelo tomaremos el artículo de Gómez-Chacón, Barbero y Arzarello (2016). En una búsqueda por superar el enfoque estático del razonamiento lógico-matemático habitual Hintikka (1996) desarrolla lo que es conocido como *Logic of Inquiry* (Lógica de la Investigación). Tiene como base la idea de que la construcción del conocimiento se produce a través de un proceso de interrogación implícito o explícito. Resultado de la búsqueda generada por una cuestión específica. Hintikka la describe cómo la lógica de la pregunta y de la respuesta o mejor como una secuencia de preguntas y respuestas. La Logic of Inquiry (Lógica de la investigación), de una parte es una forma rigurosa de la lógica que fundamenta las lógicas estándares de matemáticas, y de otra, integra lo que Fischbein llama conceptos intuitivos. En nuestro caso del estudio de los juegos, claramente se verá el entrelazamiento que se produce con la teoría de juegos y las reglas estratégicas que le van a permitir ganar al estudiante.

Así Hintikka superará las limitaciones y las abstracciones excesivas de las definiciones de Verdad propuestas por Tarski (Sher, 1999), que dejan sin explicar el camino de pensamientos para llegar a ésta. Hintikka retoma la idea de los juegos de lenguaje de Wittgenstein y algunos aspectos de la teoría de juegos, elaborando una teoría donde el centro es el camino hacia la formulación de una verdad que en lugar de proceder de forma recursiva a partir de fórmulas atómicas hasta las fórmulas complejas invierte el proceso y procede de las más complejas hasta sus componentes más simples.

Por otra parte, Hintikka, para cualquier actividad orientada por una meta que puede ser conceptualizada como un juego en el sentido de la teoría matemática de juegos, distingue dos tipos de reglas que lo rigen: las reglas definitorias y los principios estratégicos. Las reglas definitorias son las reglas que determinan las acciones que se pueden cumplir, tratando de lograr el objetivo de la actividad, las denominadas reglas de inferencia. Los principios estratégicos, son los que determinan cuáles de estas acciones es mejor hacer y en qué orden, para alcanzar la meta lo más rápido y en la mejor manera posible. La definición de verdad desarrollada por el filósofo emplea el término estrategia ganadora.

Tal como apunta Soldano & Arzarello (2016:14): “El paralelo entre un juego de estrategia y la teoría geométrica es bastante evidente, y puede ser explotado con el fin de hacer que los estudiantes entiendan lo que significa "entrar en una teoría": las reglas de los juegos y las estrategias se pueden comparar con las reglas de inferencias y el conjunto conocido de axiomas-teoremas. Con el fin de ganar un juego se le solicita desarrollar la estrategia ganadora en el medio de un determinado conjunto de reglas y movimientos posibles, de la misma manera que con el fin de probar una afirmación tienes que desarrollar una cadena lógico-estratégica entre el conjunto de axiomas y los resultados conocidos.” El modelo elaborado por Arzarello (2014) ha buscado plantear una concreción de esta propuesta para ser utiliza en la Didáctica de la Matemática. Más en concreto ha precisado elementos para analizar las interacciones entre los componentes estratégicos y deductivos en los protocolos de resolución de los estudiantes. Este modelo se estructura en dos componentes: IC (Inquiry Component): componente de investigación; DC (Deductive Component): componente deductiva

La componente de investigación (IC) es una fase dentro de la resolución en la cual el sujeto implicado alterna una serie de preguntas, respuestas y exploraciones, de acuerdo con la “lógica de la investigación” de Hintikka. En esta fase el sujeto está implicado profundamente en la actividad y su propósito es lograr el objetivo del problema, resolviendo las conjeturas que poco a poco salen como resultados de las exploraciones del problema. Estas últimas pueden ser de dos tipos:

- Una verdadera *exploración* con el fin de analizar y entender la situación en la que está implicado el sujeto.
- Una exploración de *control* con el objetivo de verificar las ideas o conjeturas que se han obtenido durante el desarrollo de la actividad.

Basándose en el modelo psicológico de Saada-Robert (1989) para la resolución de problemas matemáticos, Arzarello caracteriza esta secuencia de acciones del sujeto mediante tres modalidades diferentes: modalidad ascendente, modalidad neutra, modalidad descendente.

La modalidad ascendente es la que se refiere al paso, en la mente del sujeto, desde la exploración del problema hasta la formación de una conjetura. Está referida entonces a la formación de una idea después de una fase de investigación y de análisis de la situación. La modalidad descendente caracteriza la transición desde una conjetura o una idea hasta la realización de una investigación como resultado de las conjeturas o ideas. El propósito de la modalidad descendente es encontrar una equivalencia entre el objeto del pensamiento (la conjetura, la idea) y el objeto de trabajo (el problema y su resolución). Arzarello denomina modalidad neutral a lo que marca el cambio entre el ascenso y el descenso. Establece conexiones con el modelo de Habermas (Habermas, 1998) respecto a las componentes teleológicas, epistémica y comunicativa. En las modalidades ascendente y descendente es relevante la componente teleológica, mientras que en la neutral son relevantes las componentes epistémica y comunicativa.

Así pues las acciones observables en el sujeto, por el investigador, en la componente de investigación se pueden resumir de la siguiente manera: pregunta, afirmación, conjetura, exploración, control y formulación de un plan de resolución.

La componente deductiva (DC) es una fase de actividad en la que el sujeto no está directamente involucrado en la investigación de conjeturas y en su verificación. Esta segunda componente se caracteriza por el uso de un lenguaje con un carácter lógico para formular la verdad. Se sitúa en la fase de búsqueda, de una manera formal.

A las modalidades de acción observables en el componente de investigación se añaden dos modalidades específicas del componente deductivo: modalidad alejada y control lógico (Arzarello, 2014). La modalidad alejada es característica de aquellas fases en las que es evidente el diferente punto de vista del sujeto en comparación a la actividad llevada a cabo, el lenguaje en esta etapa tiene una fuerte connotación lógica y formal. El control lógico, es una modalidad descendente donde la idea principal es la estructura lógica en general mientras el objeto de trabajo es una frase específica para controlar la acción que se ha cumplido.

A las acciones de la componente de investigación se añaden las que son típicas de la componente deductiva. Estas son: los pasos deductivos y las cadenas lógicas. Las dos componentes a menudo no son bien diferenciadas una de la otra: durante la resolución de un problema el sujeto pasa de una componente a otra, incluso más de una vez. Podemos decir, pues, que la típica estructura que toman las componentes es anidada de esta manera: (IC ~ (DC ~ (IC ...))) con IC ~ DC el paso de una a otra.

Acciones observables		**Modalidades**
Generales	**Especificas**	
Expresiones verbales	Preguntas	Ascendente
Escritas	Afirmaciones	Neutral
Gestos	Conjeturas	Descendente
Otras (mirada, …)	Exploraciones	Alejada
Silencio	Controles	Control lógico
	Formulaciones de un plan de acción	
	Pasos deductivos	
	Cadenas lógicas	

Tabla 3.1 – Resumen acciones observables según FLIM

En la Tabla 3.1 se resumen algunas acciones observables y sus modalidades según las definiciones que se han expuestos y que se tendrán en cuenta en el análisis.

3.4.2 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS DE LOS CUESTIONARIOS

En los cuestionarios -ítems tipo escala Likert- se ha realizado un análisis cuantitativo a través de tablas y graficas de frecuencia y porcentaje, permitiendo confirmar y enriquecer el análisis cuantitativo y cualitativo de los protocolos de resolución. Para poder comparar con mayor facilidad las respuestas a las preguntas con múltiples elecciones (pregunta 1, 4, 5, 8 del cuestionario ver Anexo III) hemos dados los siguientes valores 1 Nunca, 2 Rara ver, 3 Algunas veces, 4 con frecuencia, 5 siempre pudiendo así sacar un valor medio útil para la comparación entre los distintos problemas.

4 RESULTADOS

En este capítulo se hará un informe de los resultados del análisis general del grupo de estudio, profundizando en el razonamiento regresivo a través de estudios de casos.

4.1 ANÁLISIS GENERAL DEL GRUPO DE ESTUDIO

Empezamos el análisis general del grupo de estudio examinando las dificultades expresadas por los estudiantes en los cuestionarios, seguimos con la comparación de las estrategias utilizadas y terminamos profundizando en el razonamiento regresivo.

4.1.1 DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Analizamos las respuestas a las primeras dos preguntas del cuestionario poniendo los datos en porcentajes en dos tablas. La primera tabla (Tabla 4.1) es relativa a la pregunta "¿Cómo de difícil te ha resultado resolver este problema?", que tenía 5 respuestas posibles; en la última línea se añade el valor medio para poder comparar con más facilidad los problemas. La segunda tabla (Tabla 4.2) es relativa a la pregunta "Explica por qué te era difícil".

¿Cómo de difícil te ha resultado?	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Nada	4,55%	4,76%	4,55%	5%
Rara vez	9,09%	4,76%	13,64%	20%
Algunas veces	31,82%	28,57%	22,73%	35%
Con frecuencia	50%	47,62%	31,82%	20%
Siempre	4,55%	14,29%	27,27%	20%
Valor medio sobre 5	3,41	3,62	3,63	3.30

Tabla 4.1– Respuestas a la pregunta 1 del cuestionario (porcentajes)

Observando la tabla 4.1 podemos afirmar que el problema que más difícil han considerado los estudiantes ha sido el Solitario Triangular mientras que el más fácil ha resultado el Solitario de la Bastilla. En cada caso el valor medio de dificultad está por encima de 3 sobre 5, o sea en general los 4 problemas son considerados difíciles por los estudiantes.

¿Por qué te ha resultado difícil?	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Al principio veía que había el mismo número de alubias	4,55%	-	-	-
Era difícil encontrar movimientos correctos	-	-	9,09%	-
Era lioso	-	-	13,64%	-
Era más complicado que el anterior	-	-	-	5%
Había muchas soluciones	4,55%	4,76%	-	-
Había que hacer muchos movimientos	-	-	13,64%	40%
Las probabilidades son difíciles	9,09%	-	-	-

Me he puesto a comer fichas sin pensar	-	-	9,09%	-
Me liaba al contar caminos	-	61,9%	-	-
Me liaba al no saber cuántas alubias pasaban de un saco al otro	36,36%	-	-	-
No lo entendía	9,09%	-	18,18%	-
No me salía el resultado	-	-	22,73%	30%
No sabía por dónde empezar	-	-	4,55%	5%
No sabía que método usar	13,64%	23,81%	-	-
Nunca había hecho ejercicios parecidos	13,64%	-	4,55%	-
Tardaba mucho en resolverlo	-	4,76%	-	-

Tabla 4.2 – Respuestas a la pregunta 2 del cuestionario (porcentajes)

En la Tabla 4.2 podemos observar algunas dificultades similares y diferentes.

En el Problema de las Alubias la mayor dificultad era causada por la incertidumbre del número de alubias que pasaban de un saco al otro y consecuentemente por el cálculo de los distintos casos posibles. Constatamos que algunos de los estudiantes que han interpretado el problema como un ejercicio de probabilidad consideran difícil utilizar estas nociones. En el Problema de los Caminos la mayor dificultad era causada por el elevado número de caminos que había que contar y que creaba confusión e impaciencia en los estudiantes. En el Solitario Triangular la mayor dificultad señalada por los estudiantes era el hecho de que no llegaban al resultado, mientras que en el Solitario de la Bastilla era el alto número de movimientos posibles.

Una de las dificultades comunes a los problemas es el hecho de no haber realizado ejercicios parecidos anteriormente. También una dificultad común en la resolución de los problemas es no saber que método utilizar, mientras que en los juegos es no saber por dónde empezar y no lograr alcanzar el resultado, hecho que lleva mucha frustración a los estudiantes del grupo de estudio.

4.1.2 COMPARACIÓN DE LAS DISTINTAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS

Como hemos visto en profundidad en el segundo capítulo, las posibles estrategias de resolución de problemas y juegos son múltiples. Analizando los protocolos de los estudiantes se extrae una lista de estrategias llevadas a cabo por los alumnos en la resolución de los dos problemas y de los dos juegos que hemos clasificado como sigue:

Utilizar el razonamiento regresivo, Analizar los casos límites, Descomponer el problema, simplificar, Realizar dibujos y representaciones gráficas, Ensayo-error, Realizar esquemas y tablas, Realizar un estudio sistemático de todos los casos, Experimentar manualmente, Sacar conjeturas, Resolver un problema más sencillo, Sacar partido de la simetría, Utilizar un lenguaje algebraico, Utilizar una notación adecuada.

A este listado de estrategias hemos añadido otras que no aparecen en literatura con el fin de analizar mejor los protocolos de resolución de los estudiantes:

- *Buscar una secuencia de movimientos que se repitan*: Algunos estudiantes intentan en la resolución de los juegos encontrar secuencias de movimientos que se repitan para poder alcanzar la solución,
- *Hacer intentos sin una estrategia específica*: Muchos de los estudiantes, desafortunadamente, han jugado a los Solitarios sin pensar en los movimientos que había que hacer para ganar el juego, o sea sin utilizar una estrategia específica.
- *Reconocer los distintos roles de las fichas en el tablero*: Esta estrategia ha sido utilizada por distintos estudiantes para obtener información útil para la resolución de los Solitarios aportando una mejora en las estrategias de juego; han entendido que algunas posiciones eran importantes para su resolución.
- *Utilizar nociones de probabilidad*: Consiste en considerar el problema como un ejercicio típico de probabilidad y utilizar las nociones aprendidas en clase para resolverlo.

Las estrategias desarrolladas por los estudiantes se agrupan en la Tabla 4.3 señalando los porcentajes relativos a su uso. Los problemas han sido realizados respectivamente por 22, 21, 22 y 20 estudiantes. Llega a la solución del problema solamente el 9,09% de los estudiantes en el problema de las Alubias, el 9,52% en el problema de los Caminos mientras que ningún alumno logra alcanzar la solución de los dos juegos.

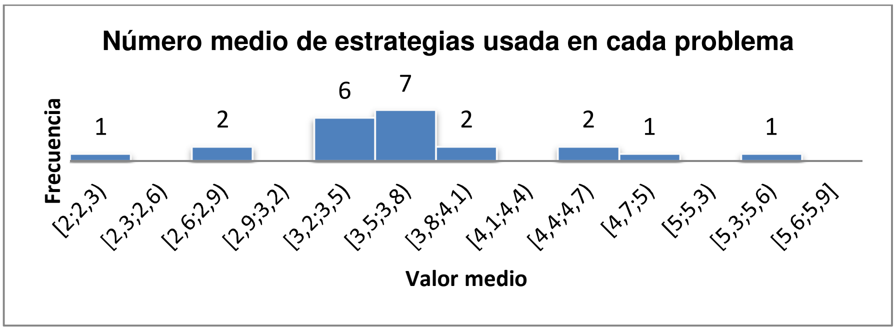
Estrategias	**Problema Alubias**	**Problema Caminos**	**Juego Triangulo**	**Juego Bastilla**
Utilizar el razonamiento regresivo	13,64%	-	36,36%	80%
Analizar los casos límites	13,64%	-	-	-
Buscar una secuencia de movimientos que se repitan	-	-	18,18%	30%
Descomponer el problema, simplificar	-	9,52%	9,09%	90%
Dibujos y representaciones graficas	100%	100%	22,73%	10%
Ensayo-Error	-	-	9,09%	10%
Esquemas y tablas	4,55%	-	-	-
Estudio sistemático de todos los casos	-	100%	-	-
Experimentar manualmente	18,18%	-	95,45%	20%
Hacer conjeturas	18,18%	-	9,09%	-
Hacer intentos sin una estrategia especifica	-	-	100%	100%
Reconocer el rol de las fichas	-	-	22,73%	60%
Resolver un problema más sencillo	4,55%	-	13,64%	-
Sacar partido de la simetría	9,09%	85,71%	-	10%
Utilizar nociones de probabilidad	59,09%	9,52%	-	-
Utilizar un lenguaje algebraico	13,64%	-	-	-
Utilizar una notación adecuada	18,18%	-	100%	70%

Tabla 4.3 – Estrategias utilizadas en el desarrollo de los 4 problemas (porcentajes)

En la Tabla 4.3 se ve la variación de uso. Podemos subdividir las distintas estrategias según el lugar de desarrollo:

- Estrategias que se utilizan solamente en los problemas: Analizar los casos límites, Realizar esquemas y tablas, Realizar un estudio sistemático de todos los casos, Utilizar nociones de probabilidad, Utilizar un lenguaje algebraico.
- Estrategias que se utilizan solamente en los juegos: Buscar una secuencia de movimientos que se repitan, Ensayo-Error, Hacer intentos sin una estrategia específica, Reconocer los distintos papeles de las fichas en el tablero.
- Estrategias que se desarrollan los problemas y en los juegos: Utilizar el razonamiento regresivo, Descomponer el problema, Experimentar manualmente, Sacar partido de la simetría, Hacer conjeturas, Resolver un problema más sencillo, Realizar dibujos y representaciones gráficas.

Se constata que entre el listado de las estrategias detectadas en problemas y juegos, las estrategias Utilizar el razonamiento regresivo, Descomponer el problema, Experimentar manualmente y Resolver un problema más sencillo se desarrollan más en los juegos mientras que las otras del grupo se desarrollan más en los problemas. Resumimos en una gráfica de frecuencia (Gráfica 4.1) el valor medio del número de estrategias utilizadas por cada estudiante en cada problema.



Gráfica 4.1 – Frecuencia por intervalos del valor medio del número de estrategias utilizadas en cada problema por cada estudiante

La media ($\bar{X}$) del número de estrategias utilizadas por cada estudiante en los 4 problemas es 3,65 estrategias cada problema. El valor medio relativo a los problemas es 2,84 mientras que aquél relativo a los juegos es 4,48 que significa que se han desarrollado un número mayor de estrategias en la resolución de los juegos. El estudiante que tiene el menos valor medio de estrategias desarrolladas en cada problema es aquello que cursa las matemáticas opción C, mientras que el estudiante con problemas de atención y aquél con las matemáticas suspensas del tercer curso están en la media del grupo.

En la respuesta a la pregunta 3 del cuestionario ("Explica que estrategias has utilizado para resolverlo") los estudiantes han indicado ninguna, una o dos estrategias. Integramos esta información en la Tabla 4.4 donde especificamos el número de estrategias que indican en la respuesta y el número de estrategias que efectivamente han utilizado entre las que han señalado, o sea el número de estrategias que han acertado.

Número estrategias	Alubias		Caminos	
	Indicadas	Acertadas	Indicadas	Acertadas
Ninguna	4,55%	31,82%	9,52%	14,29%
Una	63,64%	59,09%	61,9%	61,9%
Dos	31,82%	9,09%	28,57%	23,81%
Número estrategias	Triangulo		Bastilla	
	Indicadas	Acertadas	Indicadas	Acertadas
Ninguna	13,64%	13,64%	10%	15%
Una	50%	50%	85%	85%
Dos	36,36%	36,36%	5%	0%

Tabla 4.4 – Número de estrategias en la pregunta 3 del cuestionario (porcentajes)

En la Tabla 4.4 se constata que ha mejorado el número de aciertos de las distintas estrategias a lo largo de la investigación mientras que ha bajado ligeramente desde los problemas a los juegos el número de estrategias en que son conscientes los estudiantes.

4.1.3 LAS EMOCIONES EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Analizamos ahora las respuestas a la pregunta 8 del cuestionario poniendo los valores medio de las respuestas en dos tablas. La primera tabla (Tabla 4.5) es relativa a las preguntas "¿Has experimentado perplejidad en la realización del problema?" y "Indica con qué frecuencia has experimentado algunas de estas emociones". La segunda tabla (Tabla 4.6) es relativa a la pregunta "Indica con qué frecuencia has experimentado los siguientes procesos cuando estabas perplejo".

Emociones	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Perplejidad	3,5	3,09	2,81	2,75
Confusión	3,6	3,29	2,95	3,05
Incertidumbre	3,05	3	3,09	2,95
Confianza	2,57	2,6	2,82	2,95
Frustración	3	3,29	3,09	2,85

Tabla 4.5 – Emociones experimentadas en la resolución ($\overline{X}$)

Observando la Tabla 4.5 podemos afirmar que el problema que ha dejado a los estudiantes más perplejos ha sido el Problema de las Alubias mientras que el que menos perplejidad le ha causado es el Solitario de la Bastilla. Los alumnos han experimentado con más frecuencia en la resolución de los problemas Confusión, Incertidumbre y Frustración, mientras que han experimentado con más frecuencia Confianza en la resolución de los juegos. Podemos observar que en el Solitario de la Bastilla los valores de son generalmente más bajos en comparación con los otros problemas excepto para aquello de la Confianza, confirmando el hecho que este problema es el considerado más sencillo por los alumnos. El valor medio de dificultad está por encima de 3 sobre 5 en todas las emociones excepto la Confianza. El grupo considera los 4 problemas difíciles.

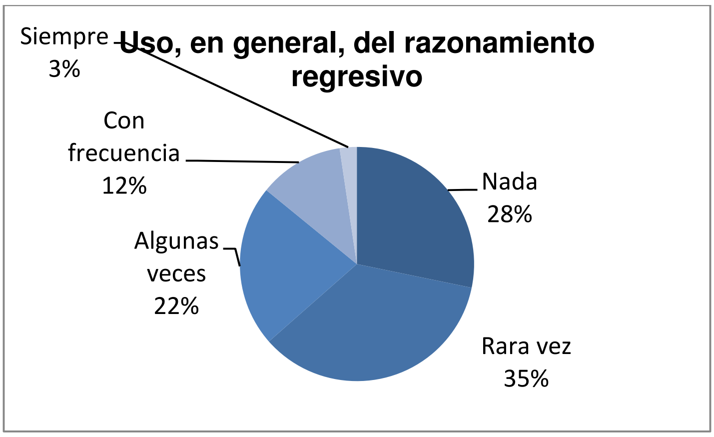
Procesos	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
He controlado la situación	3,05	2,9	3,09	3,01
Comprendía bien la situación	3,25	3,33	3,18	3,2
He hecho bastante esfuerzo	3,47	3,62	3,45	3,7
He estado atento y concentrado en el problema	4,05	4,14	3,86	4,1

Tabla 4.6 – Procesos experimentados en la resolución ($\overline{X}$)

En la Tabla 4.6 observamos que los estudiantes tienen un alto nivel de atención en la resolución de los 4 problemas. La comprensión de la situación y la concentración en el problema tienen un nivel más alto en los problemas mientras que el control de la situación y el esfuerzo tienen un nivel más alto en la resolución de los juegos. Observamos que en el Problema de los Caminos en general los estudiantes comprendían bien la situación, hacían bastante esfuerzo y estaban atentos pero no controlaban la situación mientras que en el Solitario Triangular pasaba el revés. Esto confirma el hecho de que el Problema de los Caminos resultó el problema más difícil mientras que los juegos en general son considerados más fáciles por los estudiantes.

4.1.4 PROFUNDIZACIÓN EN EL RAZONAMIENTO REGRESIVO

En esta sección nos centramos en la estrategia de razonamiento regresivo. Para cada problema ilustraremos como los estudiantes han utilizado esta estrategia en la resolución. Integraremos el análisis con las respuestas a los cuestionarios finales. Resumimos (Grafica 4.2) las respuestas a la pregunta 4 del cuestionario “Indica con qué frecuencia utilizas esta estrategia de vuelta atrás en tus clases de matemáticas”. Los estudiantes han contestado a dicha pregunta al final de cada resolución. Se indica la media de las respuestas, obteniendo una gráfica que se acerca más a la realidad del grupo.



Grafica 4.2 – Respuestas pregunta 4 del cuestionario (media de los 4 cuestionarios)

En la Grafica 4.2 se puede observar que la mayoría de los estudiantes (63%) indica que casi nunca utiliza el razonamiento regresivo.

Problema de las Alubias

En la resolución del primer problema solamente 3 alumnos (13,64%) han utilizado la estrategia de razonamiento regresivo. Hay datos discordantes con las respuestas al cuestionario dado que cinco estudiantes afirman de haberla utilizado y solo dos de ellos la han utilizado efectivamente, mientras que un estudiante lo utiliza pero afirma no haberlo hecho. Un solo estudiante de los tres que la han utilizada la señala entre las estrategias que ha utilizado en la pregunta 3 del cuestionario.

Los estudiantes que utilizan la estrategia la combinan con *Estudio de los casos límites*. Suponen haber movido siempre alubias del mismo color y llegan entonces a tener 300 alubias rojas en el saco blanco y 300 blancas en el saco rojo. Desde este resultado empiezan hacer los razonamientos.

Problema de los Caminos

En la resolución del segundo problema ningún alumno ha utilizado la estrategia del razonamiento regresivo según la corrección de los protocolos. Sin embargo, si comparamos, en las respuestas a los cuestionarios seis estudiantes afirman de haberla utilizado. No obstante, en realidad no ha sido así, es sólo su percepción.

Solitario Triangular

En la resolución del primer juego solamente 8 estudiantes (36,36%) han utilizado la estrategia del razonamiento regresivo según el análisis de los protocolos. Hay datos discordantes con las respuestas a los cuestionarios dado que seis estudiantes afirman haberla utilizado; todos ellos efectivamente la han utilizado pero hay otros dos estudiantes que la utilizan y afirman de no haberlo hecho. Solamente 4 estudiantes de los 8 que la utilizan entre las estrategias la señala en la pregunta 3 del cuestionario.

Los estudiantes que utilizan esta estrategia empiezan con una única ficha en el tablero, desde esta posición hacen movimientos inversos respecto a las reglas del juego e intentan llenar el tablero. Algunos de ellos no se limitan a hacer intentos aleatorios sino que buscan posiciones ganadoras.

Solitario de la Bastilla

En la resolución del segundo juego 16 estudiantes (80%) han utilizado la estrategia del razonamiento regresivo. Sin embargo, como venimos indicando, esto no coincide con los datos procedentes de las respuestas a los cuestionarios dado que solamente once estudiantes afirman utilizarla. Efectivamente todos ellos lo han utilizado pero hay otros cinco estudiantes que la utilizan también, aunque afirmen no haberlo hecho. Solamente 3 estudiantes de los 16 que la utilizan lo señalan entre las estrategias utilizadas en la pregunta 3 del cuestionario.

En este problema los estudiantes que utilizan la estrategia la desarrollan de dos maneras distintas: algunos, utilizando bolitas de papel, intentan jugar al revés como en el Solitario Triangular, otros se fijan en una posición ganadora compuesta de 2 a 4 fichas y, jugando en el ordenador, intentan alcanzarla. Resumimos en dos tablas los motivos que señalan los estudiantes para haber (Tabla 4.7) o no haber (Tabla 4.8) utilizado la estrategia del razonamiento regresivo. Aparecen en estas tablas todas las respuestas también de los alumnos que no han acertado en su uso en los problemas.

Motivos uso V.A.	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Era más conveniente	4,55%	-	9,09%	15%
Era más fácil	-	14,29%	4,55%	15%
Para averiguar si era correcto	4,55%	-	-	-
Para conocer el número de alubias finales	4,55%	-	-	-
Para intentar distintas opciones	4,55%	4,76%	13,64%	20%
Para no agobiarme	-	4,76%	-	-
Porque se obtiene lo mismo	-	4,76%	-	-
Veía la solución	-	-	-	5%

Tabla 4.7 – Motivos para utilizar la estrategia (porcentajes)

En la Tabla 4.7 podemos notar que en todos los problemas aparece que algunos alumnos la han utilizado para intentar distintas estrategias. Las motivaciones más recurrentes son relativas al hecho de que utilizarla en la resolución es más fácil o más conveniente.

En la Tabla 4.8 se observa que en todos los problemas hay alumnos que no la utilizan porque han utilizado otras estrategias o porque no se le había ocurrido o incluso porque no la sabían utilizar. Notamos que algunos estudiantes justifican su no uso con el hecho de que nunca les han planteado problemas similares, otros estudiantes afirman que la estrategia no era útil o necesaria e incluso que no se podía utilizar.

Los alumnos que contestaban que no habían utilizado la estrategia del razonamiento regresivo tenían que señalar que tipos de procesos consideraban que le habían faltado. Resumimos los datos obtenidos en la Tabla 4.9.

Motivos no uso V.A.	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Había muchas opciones	-	-	-	5%
He utilizado otra estrategia	18,18%	9,52%	4,55%	5%
No entendí el problema	9,09%	-	-	
No era necesaria	-	19,05%	-	5%
No era útil	4,55%	-	22,73%	
No la sabia utilizar	9,09%	9,52%	4,55%	5%
No lo veía como posibilidad	-	-	9,09%	
No me dio tiempo	-	-	-	5%
No se me ha ocurrido	36,36%	19,05%	18,18%	15%
No se podía utilizar	-	-	4,55%	-
No suelo utilizarla	-	4,76%	-	-
No veía el final	-	4,76%	-	-
Nunca me han planteado estos problemas	9,09%	9,52%	-	-
Porque ya había hecho muchos movimientos	-	-	4,55%	-

Tabla 4.8 – Motivos para no utilizar la estrategia (porcentajes)

Procesos que han faltado	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Determinación del modelo matemático	9,09%	19,05%	9,09%	10%
Obtención de condiciones suficientes	18,18%	14,29%	9,09%	10%
Acciones de descubrimiento	22,73%	33,33%	36,36%	20%
Reconocimiento y explicitación de la equivalencia representacional	22,73%	28,57%	4,55%	15%
Creación del objeto solución	4,55%	19,05%	31,82%	20%
Formulación de axiomas	36,36%	19,05%	18,18%	15%
Caracterización y establecimiento de relaciones	18,18%	19,05%	18,18%	15%
Obtención justificaciones de condiciones suficientes en equivalencias proposicionales	18,18%	14,29%	22,73%	15%

Tabla 4.9 – Tipo de procesos que los estudiantes consideran le han faltado (porcentajes)

En la Tabla 4.9 se constata que las acciones de descubrimientos, el reconocimiento y la explicitación de la equivalencia representacional y la formulación de axiomas son los tipos de procesos que faltan mayormente en la resolución de los problemas mientras que las acciones de descubrimientos y la formulación de axiomas son aquellos que faltan mayormente en la resolución de los juegos.

Describimos a continuación que estrategias se desarrollan en paralelo al razonamiento regresivo. Se sintetiza en la Tabla 4.10 los porcentajes de estudiantes que utilizan una estrategia específica en el mismo protocolo que el razonamiento regresivo.

En la Tabla 4.10 se indica que Realizar esquemas y tablas, Realizar un estudio sistemático de todos los casos y Utilizar un lenguaje algebraico no se han desarrollado al mismo tiempo que el razonamiento regresivo en ninguno de los problemas propuestos. Existen algunas estrategias que se desarrollan al mismo tiempo que el razonamiento regresivo solamente en algunos problemas, mientras que Hacer dibujos y representaciones graficas son estrategias utilizadas en todos los problemas.

Estrategias	Problema Alubias	Problema Caminos	Juego Triangulo	Juego Bastilla
Analizar los casos límites	100%	No uso	-	-
Buscar una secuencia de movimientos que se repitan	-	No uso	12,5%	37,5%
Descomponer el problema, simplificar	-	No uso	-	87,5%
Dibujos y representaciones graficas	100%	No uso	37,5%	12,5%
Ensayo-Error	-	No uso	12,5%	-
Esquemas y tablas	-	No uso	-	-
Estudio sistemático de todos los casos	-	No uso	-	-
Experimentar manualmente	-	No uso	100%	25%
Hacer conjeturas	33%	No uso	-	-
Hacer intentos sin una estrategia especifica	-	No uso	100%	100%
Reconocer el papel de las fichas	-	No uso	25%	75%
Resolver un problema más sencillo	-	No uso	25%	-
Sacar partido de la simetría	33%	No uso	-	6,25%
Utilizar nociones de probabilidad	33%	No uso	-	-
Utilizar un lenguaje algebraico	-	No uso	-	-
Utilizar una notación adecuada	-	No uso	-	62,5%

Tabla 4.10 – Porcentajes estudiantes que utilizan una estrategia específica al mismo tiempo que el razonamiento regresivo

Por último, relacionamos las respuestas a la pregunta 8 con el uso del razonamiento regresivo en los problemas (excepto en aquello de los Caminos en el cual no se ha utilizado). Resumimos los valores medios de las respuestas organizando dos tablas de valores (Tabla 4.11 y 4.12) relativas a las emociones y a los procesos subdividiendo las respuestas entre los que han utilizado la estrategia y los que no lo han hecho.

Emociones	Problema Alubias		Problema Caminos		Juego Triangulo		Juego Bastilla	
	Uso	No uso	Uso	No uso	Uso	No uso	Uso	No uso
Perplejidad	3,33	2,93	-	3,09	2,57	2,93	2,81	2,5
Confusión	4	3,53	-	3,29	2	3,54	3	3,25
Incertidumbre	2,67	2,12	-	3	3,14	3,07	3	2,75
Confianza	2,67	2,56	-	2,6	3	2,71	2,81	3,5
Frustración	3,67	2,88	-	3,29	2,38	3,5	2,88	2,75

Tabla 4.11 – Emociones en la resolución en comparación con el uso del razonamiento regresivo ($\overline{X}$)

Observando la Tabla 4.11 podemos afirmar que en la resolución del Solitario Triangular los estudiantes que utilizan la estrategia han experimentado menos perplejidad en comparación con aquellos que no la han utilizado mientras que en los otros dos problemas es al revés. Entre los alumnos que han utilizado el razonamiento regresivo los niveles de Perplejidad, Confusión y Frustración son más altos en la resolución del Problema en comparación con aquella de los juegos, mientras que con la Incertidumbre y la Confianza ocurre al contrario.

Procesos	Problema Alubias		Problema Caminos		Juego Triangulo		Juego Bastilla	
	Uso	No uso	Uso	No uso	Uso	No uso	Uso	No uso
He controlado la situación	3,67	2,94	-	2,9	3,5	2,86	3	3,5
Comprendía bien la situación	3,33	3,24	-	3,33	3,63	2,93	3,13	3,5
He hecho bastante esfuerzo	3,67	3,44	-	3,62	3,63	3,36	3,63	4
He estado atento y concentrado en el problema	3,33	3,81	-	4,14	4	3,79	4,06	4,25

Tabla 4.12 – Procesos en la resolución en comparación con el uso del razonamiento regresivo ($\overline{X}$)

En la Tabla 4.12 observamos que la frecuencia d los procesos experimentados es en general más alta para el Problema de las Alubia y el Solitario Triangular en los estudiantes que utilizan la estrategia del razonamiento regresivo, mientras que para el Solitario de la Bastilla es al revés.

A partir de este análisis más en profundidad se han podido subdividir los estudiantes en 4 perfiles:

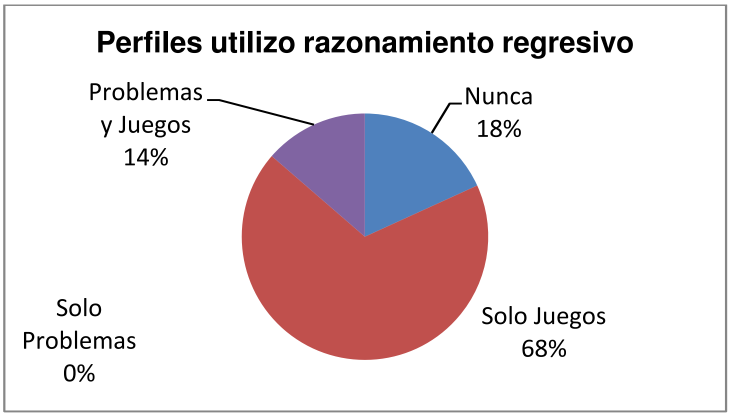
P1. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo en problemas y juegos.

P2. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo solamente en la resolución de los problemas.

P3. Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo solamente en la resolución de los juegos.

P4. Estudiante que nunca utiliza el razonamiento regresivo.

Que podemos resumir utilizando los porcentajes relativo al grupo de estudio según la gráfica 4.3.



Grafica 4.3 – Perfiles de uso del razonamiento regresivo

4.2 ANÁLISIS DEL ESTUDIO DE CASOS

Los dos estudiantes que se han elegido para el estudio de casos son dos alumnos de 15 años que cursan el 4° año de curso en el Centro. Por motivos de privacidad hemos elegido darles dos nombres ficticios: Alejandro y Blanca. Se han elegido estos dos alumnos porque su trabajo en la resolución de lo los problemas y el esfuerzo que han puesto al describir los pensamientos y los procesos mentales de razonamiento resultan muy interesantes en el desarrollo de los protocolos. Estos alumnos son aquellos que han desarrollado el mayor número de estrategias en la resolución de los 4 problemas.

Los dos estudiantes realizan las actividades de manera distinta: Alejandro utiliza predominantemente imágenes que tienen un papel fundamental en el desarrollo de su resolución y redacta el protocolo paso a paso mientras que Blanca casi no utiliza imágenes y se dedica en un segundo tiempo a la redacción clara y concisa del protocolo. Ambos estudiantes ejercitan un control continuo sobre su propio proceso de resolución, reflexionando en cada paso sobre la estrategia seguida intentando modificarla si descubren que no lleva a la solución.

Alejandro es un “Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo en problemas y juegos” forma parte, entonces, del primero de los perfiles establecidos al final del análisis del grupo de estudio, mientras que Blanca forma parte del tercer perfil, es una “Estudiante que utiliza el razonamiento regresivo solamente en la resolución de los juegos” (ver apartado anterior). Se profundizará en el uso de esta estrategia en la resolución del Solitario Triangular utilizando como herramienta de investigación metodológica la Finer Logic of Inquiry Model (FLIM).

Para el análisis se ha dividido cada uno de los protocolos en fases siguiendo el modelo de comparación de heurística de Gómez-Chacón (1992) (Tabla 2.2): en particular en los dos protocolos que analizamos son presentes las fases de Familiarización y Explorar y llevar a cabo la estrategia mientras que la fase de Comprobar los resultados no está presente debido a que los dos alumnos, como el resto de sus compañeros, no han logrado alcanzar la solución del juego. La información de las entrevistas nos ha permitido establecer unos perfiles más precisos de los dos estudiantes que han sido elegidos incluyendo sus actitudes hacia los juegos y hacia su uso en el aula.

4.2.1 ESTUDIO DE CASO: ALEJANDRO

La rutina que describe el estudiante para la resolución de los problemas que a menudo le proponen en el aula empieza con la lectura del problema y la toma de los datos necesario para la resolución, sigue entonces con el dibujo del problema para "tenerlo de forma visual así es más sencillo" y se concluye viendo "si se puede usar ecuaciones o regla de tres". Alejandro considera muy importante la parte de lectura del problema, al respecto afirma: "Prefiero leerme el enunciado varias veces y después empezar viendo que puedo usar y que es lo que necesito usar para la solución […] La forma de resolver depende de cómo lees el enunciado porque si lo lees de forma tranquila y lo entiendes perfectamente pues te puede ser más fácil resolverlo […] pero si te lo lees de una forma distinta en plan "*Menudo texto tan grande!*" y no lo tomas bien o no te gusta o piensas que es una cosa, como ecuaciones y dices "*¡Buah! ¡Es que las ecuaciones no me gustan!*" […] entonces dejas de ver cosas: empiezas a hacer lo que no te gusta mientras podrías resolverlo de otra manera más sencilla y que te pareciese más fácil de entender."

Observando sus protocolos se nota el uso predominante de las imágenes. Y él afirma: "Se hace más fácil pensar al tener una imagen visual, te ayuda más a ver que puedes hacer. Si te diesen solo el problema sin imagen se haría más complicado. […] Si te dan una imagen visual como ésta (se refiere al triángulo en el problema de los Caminos) […] siempre intentas al principio hacerlo, […] es la segunda opción resolverlo con números."

Alejandro es un chico que en el tiempo libre se entretiene practicando juegos de mesa como el ajedrez o las cartas y videojuegos (on-line y off-line). Juega más frecuentemente con los videojuegos pero afirma preferir los juegos de mesa porque le permiten jugar en compañía de familiares y amigos. Le gusta la idea de aprender conceptos y estrategias a través de los juegos, al respecto afirma: "Es una actividad lúdica, lo mismo entendemos más en esta actividad que si nos lo dan en forma de temario. […] Lo tomamos como una actividad más fácil, más sencilla y más divertida."

El estudiante ha preferido trabajar con los juegos que con los problemas durante la investigación porque son "más entretenidos". Entre los dos juegos ha preferido jugar al Solitario de la Bastilla con el ordenador pero afirma que con bolitas de papel es más sencillo utilizar el razonamiento regresivo para la resolución. A confirmación de esto en la pregunta 8 del cuestionario los valores de Perplejidad, Confusión, Incertidumbre y Frustración resultan más altos en las respuestas relativas a los problemas mientras que para la Confianza resulta al contrario. Además, resulta que en los juegos controlaba y comprendía mejor la situación y tenía niveles más altos de atención, mientras que él hacía más esfuerzo en la resolución de los problemas.

Este estudiante afirma no soler utilizar la estrategia del razonamiento regresivo, confirmando sus respuestas a la pregunta 4 de los cuestionarios, pero la utiliza en ambos juegos y en el Problema de las Alubias. Esta estrategia le parece útil y más fácil de usar pero solamente para ciertos problemas o ejercicios, indica que en los dos juegos propuestos es la mejor estrategia a utilizar. Respecto a las otras estrategias que utiliza Alejandro sabe describirlas casi todas y reconoce, en el caso, su uso en las distintas partes de sus protocolos.

Siguiendo el modelo de Lógica de la Investigación (A Finer Logic of Inquiry Model) analizamos el protocolo del Solitario Triangular que está caracterizado principalmente por la componente de investigación (CI). Ésta comienza con la primera parte del protocolo, correspondiente a la _Fase de familiarización_.

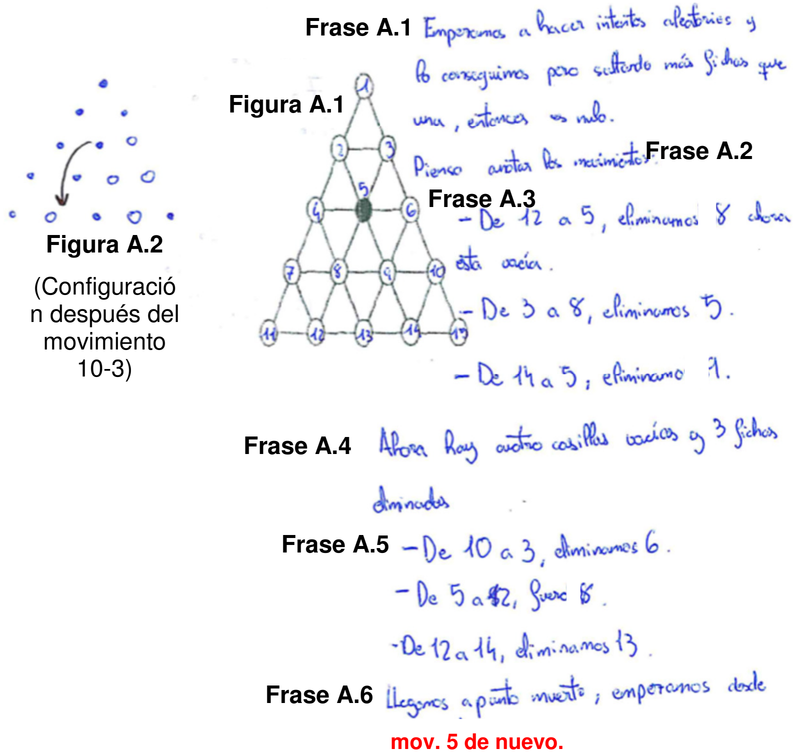


Imagen 4.1 – Primera parte del protocolo de Alejandro

Partes protocolo	Acción	Modalidad	Estrategias aplicadas
		Fase de familiarización	
Frase A.1	Exploración	Descendente	Hacer intentos aleatorios Experimentar manualmente (continúa todo el protocolo)
	Control	Ascendente	
		Explorar y llevar a cabo la estrategia	
Frase A.2 y Figura A.1	Plan	Neutral	Utilizar una notación adecuada (continúa todo el protocolo)
Frase A.3	Exploración	Descendente	
Frase A.4	Control	Ascendente	
Frase A.5 y Figura A.2	Exploración	Descendente	Hacer dibujos y representaciones gráficas (continúa todo el protocolo)
Frase A.6	Control	Ascendente	
	Plan	Neutral	Ensayo – Error

Tabla 4.13 – Análisis FLIM y desarrollo de las estrategias en la primera parte del protocolo de Alejandro

El estudiante empieza a explorar el problema después de haber leído las reglas del juego. Como primer paso hace algunos *intentos aleatorios* utilizando bolitas de papel como fichas (*experimentar manualmente*) dándose cuenta en poco tiempo de haberse equivocado en la aplicación de las reglas del juego. Sucesivamente empieza la segunda fase de resolución *Explorar y llevar a cabo la estrategia* donde Alejandro intenta *poner una notación adecuada* para tener un rastro de los movimientos hechos y empieza a resolver el problema; después de 3 movimientos controla que ha obtenido con lo que ha hecho (Frase A.4). Continúa resolviendo el problema haciendo otros 3 movimientos hasta llegar a una configuración (Imagen 4.2) en la que se da cuenta de que no hay solución.

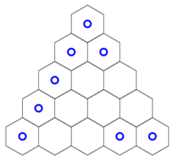


Imagen 4.2 – Configuración al terminar los primeros 6 movimientos

Entonces decide volver a la configuración obtenida después del cuarto movimiento (Figura A.2) y hacer un nuevo quinto movimiento (*Ensayo-Error*).

Figura A.3

(Configuración después del movimiento 11-4)

Frase A.7
- De 4 a 6, fuera 5.
- De 11 a 4 fuera 7.
- De 3 a 10, fuera 6
- De 15 a 6, fuera 10.
- De 2 a 7, fuera 4

Frase A.8 Hemos conseguido quedarnos a 2 fichas.

Figura A.4

3.
4. 5.
o o o 9. o

Frase A.9 Configuración ganadora

Figura A.5

4.
4o 5.
7. 8o 9.
11.

Figura A.6

5.
5.
7. 8o 9.
11o 12. 13.

Imagen 4.3 – Secunda parte del protocolo de Alejandro

Partes protocolo	Acción	Modalidad	Estrategias aplicadas
Explorar y llevar a cabo la estrategia			
Frase A.7 y Figura A.3	Exploración	Descendente	
Frase A.8	Control	Ascendente	
Frase A.9	Plan	Neutral	Utilizar el razonamiento regresivo (continúa todo el protocolo)
Figuras A.4, A.5 y A.6	Exploración	Descendente	Resolver problemas más sencillos

Tabla 4.14 – Análisis FLIM y desarrollo de las estrategias en la segunda parte del protocolo de Alejandro

Alejandro continúa resolviendo el problema y después de algunos movimientos más llega a una configuración con 2 fichas en el tablero que no se pueden mover (en el protocolo falta el rastro de los últimos tres movimientos –13-4, 7-2, 1-4– que dejan dos fichas en las posiciones 4 y 6). A este punto el estudiante empieza a *utilizar el razonamiento regresivo* buscando configuraciones ganadoras (*resolver problemas más sencillos*) de 3, 4 y 5 fichas. Observamos que la configuración ganadora con la cual empieza es una configuración de 3 fichas que permite ganar el juego en dos posiciones distintas la 1 (movimientos 9-2 y 4-1) o la 13 (movimientos 4-6 y 6-13). Podemos ver como en este protocolo el estudiante hace uso de distintas estrategias para lograr obtener la solución, en particular, apoya sus razonamientos en los dibujos y en las representaciones graficas de los movimientos. El primer momento decisivo en la resolución del problema lo podemos observar en la parte de protocolo en la cual decide utilizar el Ensayo-Error, el segundo cuando empieza a utilizar el razonamiento regresivo empezando por el final del problema. Combina la estrategia con la búsqueda de configuraciones ganadoras (resolver un problema más sencillo) para intentar lograr llegar a la solución.

4.2.2 ESTUDIO DE CASO: BLANCA

La rutina que describe la estudiante para la resolución de los problemas que a menudo le proponen en el aula empieza con la lectura del problema y la toma de los datos necesarios para la resolución, sigue entonces con la búsqueda de relaciones entre los datos y se concluye viendo "si al final es una ecuación o lo que sea". Observando sus protocolos se nota que casi no utiliza las imágenes; en la entrevista al respecto afirma: "Es que las imágenes sólo las uso en geometría cuando me dicen por ejemplo "Tienes un huerto y tienes las dimensiones" y sólo para mirar y ya está: no suelo utilizar dibujos."

Blanca es una chica que, a veces con su hermana, en el tiempo libre, juega a las cartas o al parchís y afirma que es "muy mala con la PlayStation". Se sorprende de la idea de aprender conceptos y estrategias a través de los juegos, pero después de una breve reflexión afirma: "Si nos pones allí los problemas nos asusta un poco porque, por ejemplo, si son conceptos desconocidos que no sabemos si los explicas mediante el juego es más divertido, nos entretiene más.”

La estudiante afirma tener dificultades en la resolución de los juegos porque “no sabía cómo resolverlos” mientras que los problemas eran solamente “de pensar”. Entre los dos juegos ha preferido jugar al Solitario de la Bastilla con el ordenador porque con el tablero digital no podía equivocarse en los movimientos (la página web no dejaba hacer movimientos prohibidos) pero, como Alejandro, afirma que con bolitas de papel es más sencillo utilizar el razonamiento regresivo. Confirma esto pregunta 8 del cuestionario donde los valores de Perplejidad e Incertidumbre resultan más altos en la resolución de los juegos mientras que la Frustración tiene valores más altos en la resolución de problemas. Los valores de Confusión y confianza se parecen en las cuatro resoluciones. Resulta además que comprendía mejor la situación en los problemas, mientras que hacía más esfuerzo en los juegos. En ambos estaba atenta y controlaba la situación.

Además afirma que ha utilizado a veces esta estrategia, confirmando sus respuestas a la pregunta 4 de los cuestionarios, en particular en aquellos problemas donde le “dan la solución” y ella tiene que “ver qué pasos ha seguido antes para que le dé eso”. Esta estrategia le parece más fácil porque “simplifica la resolución”. Respecto a las otras estrategias que le se presentan Blanca tiene dificultades en describirlas y solamente algunas reconoce haberlas usado en partes de sus protocolos.

Siguiendo el modelo de Lógica de la Investigación (A Finer Logic of Inquiry Model) analizamos el protocolo del Solitario Triangular que, como el de Alejandro, está caracterizado principalmente por la componente de investigación (CI). Ésta comienza con la primera parte del protocolo, correspondiente a la _Fase de familiarización_.

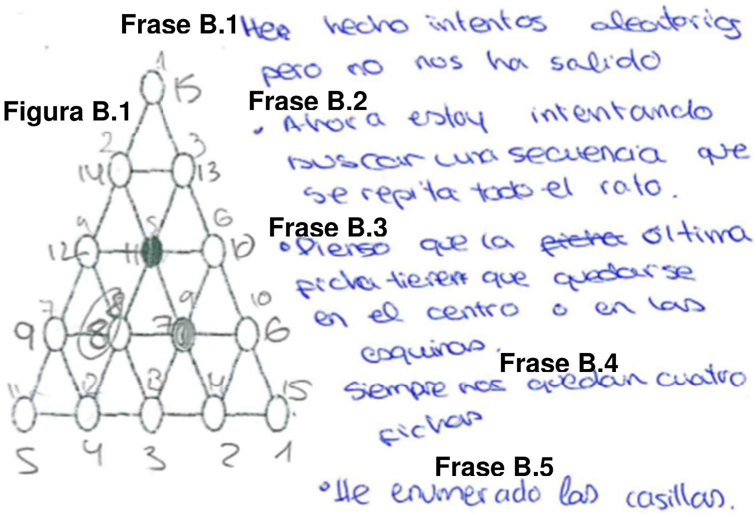


Imagen 4.4 – Protocolo de resolución de Blanca

Partes protocolo	Acción	Modalidad	Estrategias aplicadas
Fase de familiarización			
Frase B.1	Exploración	Descendente	Hacer intentos aleatorios Experimentar manualmente (continúa todo el protocolo)
	Control	Ascendente	
Explorar y llevar a cabo la estrategia			
Frase B.5 y Figura B.1	Plan	Neutral	Utilizar una notación adecuada (continúa todo el protocolo)
Frase B.2	Plan y Exploración	Descendente	Buscar una secuencia de movimientos que se repitan
Frase B.3	Conjetura	Ascendente	Hacer conjeturas
	Plan y Exploración	Descendente	Utilizo del razonamiento regresivo
Frase B.4	Control	Ascendente	

Tabla 4.15 – Análisis FLIM y desarrollo de las estrategias en el protocolo de Blanca

La estudiante empieza a explorar el problema después de haber leído las reglas del juego. Como primer paso hace algunos *intentos aleatorios* utilizando bolitas de papel como fichas (*experimentar manualmente*) no logrando alcanzar la solución del juego. Sucesivamente empieza la segunda fase de resolución *Explorar y llevar a cabo la estrategia* donde Blanca intenta *poner una notación adecuada* para buscar una regularidad en la disposición de las casillas, por esto enumera las posiciones empezando por dos esquinas distintas (la de arriba y la de la derecha) y las observa; la única cosa que nota es que en las dos numeraciones las casillas en la posición 8 coinciden. Después intenta *buscar si existen algunos movimientos que se repiten*, o sea si hay unas configuraciones de movimientos que se pueden aplicar sucesivamente en distintos puntos del tablero para sacar la solución. A este punto de la resolución, después de haber hecho algunos intentos, *conjetura* que la última ficha tiene que quedarse en el centro o en las esquinas y justifica esto así: “porque en los intentos aleatorios en las esquinas siempre se nos quedaba alguna (ficha) que no podíamos mover.” Continúa entonces resolviendo el problema haciendo algunos intentos aleatorios en sentido normal y *marcha atrás* (que no aparece en el protocolo y que nos cuenta en la entrevista).

Podemos ver como, también Blanca en este protocolo, hace uso de distintas estrategias para lograr obtener la solución, ella forma parte del grupo de estudiantes que continúa haciendo intentos a lo largo de la resolución. Notamos como para la mayor parte del desarrollo del protocolo intenta buscar un “truco” para resolver el solitario. Combina distintas estrategias de resolución entre las cuales se encuentra el razonamiento regresivo empezando por el final del problema e intentando aleatoriamente lograr llenar el tablero y llegar a la solución.

5 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo discutiremos los resultados obtenidos en la investigación de acuerdo a los objetivos, que hemos especificado en la introducción, y su relación con la profesión docente. Además, analizaremos los límites de la investigación y sus perspectivas futuras.

5.1 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la validez de la hipótesis planteada. Se puede afirmar que:

Las estrategias de razonamiento regresivo son utilizadas por los estudiantes con más frecuencia en la resolución de los juegos de estrategias que en la resolución de problemas.

Con esta investigación se han podido obtener resultados significativos de los objetivos generales:

O1: Explorar los procedimientos heurísticos que desarrollan estudiantes de Secundaria en la resolución de juegos de estrategias y en la resolución de problemas matemáticos abiertos.

O2: Analizar, con el modelo metodológico de interpretación "A Finer Logic of Inquiry Model" (FLIM), el desarrollo del pensamiento estratégico en la búsqueda de una estrategia ganadora por parte de los estudiantes en juegos de estrategias y problemas abiertos.

Se discuten los resultados obtenidos de acuerdo a los objetivos específicos:

1. **Analizar el desarrollo de las estrategias de resolución en los problemas y en los juegos propuestos, en particular:**
    a. **Identificar qué estrategias específicas se desarrollan en las diferentes resoluciones.**

El análisis del grupo de estudio permite señalar los siguientes resultados:

1. *El uso de las nociones de probabilidad en la resolución del Problema de las Alubias.*

Según el estudio de las dificultades detectadas en el análisis de los protocolos y de las estrategias desarrolladas podemos deducir que la mayoría de los estudiantes ha interpretado el problema de las Alubias como un ejercicio de probabilidad poniendo toda su atención en el cálculo de valores sin intentar otras estrategias o utilizándolas sin lograr alcanzar la solución. Muy probablemente el hecho de operar sobre objetos de distintos colores contenidos en sacos ha despertado en sus mentes una asociación con las preguntas típicas de los ejercicios propuestos en las clases relativas al tema de Probabilidad. El hecho de tener que utilizar estas nociones ha sido un aspecto negativo generando desánimo en los estudiantes. Así lo expresa el 9,09% de los alumnos, señalando que el problema le ha resultado difícil por el hecho de utilizar las probabilidades para resolverlo.

2. *El Estudio sistemático de todos los casos en el Problema de los Caminos.*

Todos los estudiantes en la resolución del Problema de los Caminos han realizado un estudio sistemático de todos los casos, contando uno a uno los distintos caminos del problema. El uso de esta estrategia básica y el hecho de que no han aparecido otras estrategias más complejas como la Extraer pautas (Inducir) puede significar que los estudiantes entrevistados tienen escasas habilidades estratégicas.

3. *Hacer intentos sin una estrategia específica en la resolución de los Solitarios.*

Todos los alumnos en la resolución de los dos solitarios han hecho intentos sin utilizar una estrategia específica. Como afirma De Guzmán (1984a), en la fase de familiarización durante la resolución de un juego, es normal que los estudiantes intenten practicar el juego sin buscar una técnica resolutiva pero en el 36,36% de los protocolos del Solitario Triangular es la única “estrategia” utilizada. Este medio-alto porcentaje de estudiantes que no utilizan una estrategia específica para la resolución del solitario triangular es un dato bastante significativo: podría de hecho demostrar escasez de habilidades estratégicas en los estudiantes del grupo.

b. Establecer similitudes y diferencias en el uso de estrategias en la resolución de los problemas y de los juegos propuestos.

El análisis del grupo de estudio podemos subrayar los siguientes resultados:

1. *La disminución del desarrollo de la estrategia hacer dibujos y representaciones gráficas.*

El porcentaje de estudiantes que realizan dibujos y representaciones gráficas disminuye drásticamente pasando en la resolución de los problemas, donde todo el alumnado los realiza, a la resolución de los juegos donde solamente el 22,73% y el 10% respectivamente de los estudiantes los realiza. La posibilidad de utilizar un tablero manipulativo con bolitas de papel o el juego en el ordenador hace que los estudiantes no sientan la necesidad de dibujar la situación problema para ayudarse en la resolución a través de las imágenes.

2. *El escaso uso de la estrategia Sacar partido de la simetría.*

Aunque los cuatro problemas presentasen una clara simetría, esta estrategia tiene valores de desarrollo muy bajos o incluso nulos en todos los problemas excepto en aquél de los Caminos. En la resolución de problemas es más clara la simetría si el problema proporciona una imagen en su enunciado, mientras que en los juegos, para este grupo de alumnos es más clara la simetría del tablero en forma de cruz que en el triangular.

3. *El mayor desarrollo de la estrategia del Razonamiento regresivo se da en los juegos de estrategias.*

Aunque los estudiantes afirman que no suelen utilizar esta estrategia, en a tabla 4.3 se constata el progresivo aumento en el desarrollo del razonamiento regresivo de la resolución de los problemas a los juegos. En el Solitario de la Bastilla se llega al alcanzar el 80% del uso. También se puede observar que se utiliza mayormente en el problema y en el juego que les resulta más fácil a los estudiantes. Así en el problema de los Caminos, considerado el más difícil entre los dos problemas ningún alumno la utiliza mientras como hemos indicado el 80% la utiliza en el Solitario de la Bastilla.

2. Analizar en profundidad el uso del razonamiento regresivo.

Desde el análisis más en profundidad que hemos llevado a cabo resulta que:

1. *Existen algunas técnicas que ayudan en el desarrollo de la estrategia.*

Los datos de la Tabla 4.8 crean una conexión entre las distintas estrategias y la del razonamiento regresivo. El desarrollo en paralelo de la estrategia Hacer dibujos y representaciones gráficas puede significar que el uso de imágenes favorece el desarrollo del razonamiento regresivo. Según la estructura del problema hay otras estrategias que pueden ayudar a su desarrollo o que vienen utilizadas en combinación con esta para intentar lograr la solución. Por ejemplo, en el caso de los solitarios son Descomponer el problema, Experimentar manualmente y Hacer intentos sin una estrategia específica, en el caso del problema de las Alubias es Analizar los casos límites.

2. *Falta de procesos para el uso de la estrategia*

El estudio de las respuestas a la pregunta 7 del cuestionario (Anexo III) indica que los tipos de procesos que han faltado mayormente para el uso de la estrategia son las Acciones de descubrimiento, la Creación del objeto solución y la Formulación de Axiomas. La ausencia de estos procesos hace que un gran número de estudiantes no pueda utilizar el razonamiento regresivo en la resolución de los problemas.

3. Dificultades en el reconocimiento de la estrategia

La mayoría de los estudiantes (63%) en la pregunta 4 del cuestionario afirma que no utiliza casi nunca la estrategia del razonamiento regresivo (ver capítulo 4). Esto no significa que de verdad no la utilicen: como se ha visto en el capítulo 4 hay una discrepancia entre algunas respuestas a la pregunta 5 sobre el uso de la estrategia y la real resolución del problema. Esto puede significar que hay una dificultad entre los estudiantes para reconocer la mayor o menor utilización de esta técnica de resolución. Las afirmaciones de los estudiantes entrevistados revelan que nadie le ha explicado cuales son las técnicas resolutivas de los problemas y en particular la estrategia del razonamiento regresivo. Estas últimas afirmaciones nos hacen pensar que los estudiantes no están acostumbrados a resolver problemas abiertos.

3. **Analizar las trayectorias de pensamiento que llevan a la formulación de una estrategia ganadora.**

El componente deductivo (CD) no aparece en el desarrollo de los protocolos analizados. Pensamos que esto puede ser debido, además del poco tiempo a disposición que no ha permitido lograr obtener una solución, al hecho de que en la resolución de un juego es menor el componente de demostración de validez de la estrategia ganadora y de validez de la solución en comparación con la resolución de los problemas.

El análisis con el modelo de la FLIM permite afirmar que el desarrollo del pensamiento estratégico vuelta atrás está caracterizado por una alternancia entre formulación de planes de resolución y exploraciones. Los estudiantes desarrollan distintas estrategias a lo largo del protocolo. Después de una primera formulación de la estrategia los estudiantes intentan aplicarla al problema a través de una fase de exploración en la que observan y controlan como actúa dicha estrategia y desde la cual pueden surgir nuevas ideas de resolución. El paso desde una estrategia a otra se cumple después de un momento de control en el cual los estudiantes entienden que la estrategia utilizada no es la ganadora; esto se cumple de tres maneras diferentes: se sustituye la vieja estrategia por una nueva, se modifica ligeramente la vieja estrategia, se combina la vieja estrategia con una nueva y ambas se desarrollan al mismo tiempo. La combinación entre las distintas estrategias llevaría a la solución de los problemas propuestos.

5.2 CONCLUSIONES RESPECTO A LA PROFESIÓN DOCENTE

Al terminar la investigación se puede confirmar que los juegos de estrategias son útiles como instrumento metodológico para la introducción y/o la consolidación de las distintas estrategias de resolución, en particular para el desarrollo del razonamiento regresivo. Son un instrumento adecuado para el desarrollo del pensamiento estratégico indispensable para la resolución de problemas. La actividad de juego favorece el uso de estrategias que habitualmente no se utilizan o que se desarrollan menos. Como futura profesora soy favorable al uso de estos instrumentos en el aula y pensamos que son herramientas apropiadas para el desarrollo de técnicas de resolución y que llevan un cierto beneficio también desde el punto de vista de la actitud de los estudiantes hacia la materia.

Los resultados de los protocolos de resolución ponen de manifiesto algunas dificultades generales del grupo que pensamos puedan encontrarse en general en la institución escolar:

1. Los estudiantes no prestan atención al leer el texto del problema propuesto y consecuentemente piensan que no saben resolverlo o lo resuelven de manera equivocada.

Esto, en particular, se ha verificado en la resolución del problema de las Alubias donde el 36,36% de los estudiantes ha contestado a la pregunta, equivocada, "¿Habrá al final más alubias blancas en el saco *blanco* que alubias rojas en el saco blanco o al revés?". También hay algunos casos en la resolución del Solitario Triangular, donde algunos estudiantes, como se muestra en el estudio de caso de Alejandro, resuelven el juego haciendo movimientos prohibidos como desplazar una ficha en la casilla al lado o saltando dos casillas de una vez, una vacía y otra con ficha. Para obviar este problema hemos intentado recordar a los estudiantes, para cada problema, de prestar atención al leer el enunciado y los hemos animado a preguntar si no estaban seguros de haber entendido el problema.

2. Los estudiantes no están acostumbrados a resolver problemas abiertos

Desde las respuestas a los cuestionarios, en particular a las preguntas 3 y 4, y desde las entrevistas individuales hemos notado que los estudiantes no saben reconocer las distintas estrategias que utilizan en la resolución de los problemas. Esto es debido al hecho de que no están acostumbrados a resolver problemas abiertos durante las sesiones de clase y los profesores, a lo largo de los años de enseñanza nunca les han explicado las distintas estrategias de resolución no obstante en los currículos de matemáticas (Decreto n°22, 2007; Decreto n° 48, 2015 (en BOCM)) se hace hincapié en la importancia de la resolución de problemas en el aula y se pone como objetivo trasversal de la asignatura.

Como futura profesora ha sido muy formativo el desarrollo de este experimento de enseñanza que trata de abordar estas dificultades proponiendo en clase problemas abiertos y juegos de estrategias para motivar a los estudiantes y al mismo tiempo desarrollar el pensamiento estratégico en ellos, útil para la resolución de problemas.

5.3 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Las dos grandes limitaciones del estudio han sido el tiempo disponible para la resolución de los 4 problemas y el exiguo número de alumnos involucrados en la investigación.

Si hubiéramos tenido mayor tiempo en cada sesión para la resolución de los problemas hubiera podido surgir nuevas estrategias y una mayor cantidad de alumnos hubieran podido alcanzar la solución. Con solamente las 4 sesiones a disposición no se ha podido dedicar tiempo a la puesta en común de las estrategias de resolución y de los resultados obtenidos, fase muy importante para la adquisición de nuevos conceptos y estrategia por parte de los alumnos. De hecho una puesta en común puede permitir que una discusión entre pares sobre la resolución de un problema pueda dar lugar a discusiones interesante para que el grupo total logre la formulación de una estrategia ganadora.

Hacemos notar que pese a ser desarrollada la investigación con 22 alumnos se han obtenido resultados interesantes. Con un grupo de estudio más amplio se habría podido llevar a cabo una investigación cuantitativamente más representativa, en particular se habrían podido analizar más detalladamente las dificultades encontradas por los estudiantes en el uso del razonamiento regresivo.

5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Después de haber confirmado la utilidad del juego como instrumento para el desarrollo del razonamiento regresivo sería interesante proseguir con más estudios con la misma finalidad.

Sería interesante ampliar el número de participantes en la experimentación proponiendo la misma a más grupos de alumnos de secundaria, a estudiantes universitarios y a profesores de secundaria. Se podría entonces hacer un estudio comparativo entre las distintas estrategias, y en particular el razonamiento regresivo, que se desarrollan según la formación de los individuos considerados.

Y para concluir, indicar que consideramos que una enseñanza centrada en la resolución de problemas que utilice como instrumento metodológico los juegos de estrategia es óptima para involucrar y motivar a los alumnos de manera que aprendan distintas heurísticas y de forma específica las de razonamiento regresivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARZARELLO, F. (2014), Apuntes de la conferencia A new structural approach to argumentation in mathematics: from Toulmin model to Hintikka logic of inquiry, en el interior del Workshop: *Mathematics education as a transversal discipline*, 21 noviembre 2014, Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università degli Studi di Torino.

BALL, W.W.R. e COXETER, H.S.M. (1974), *Mathematical recreations and essays*, Toronto, University press.

BELL, R. e CORNELIUS, M. (1990), *Juegos con tablero y fichas*, Editorial Labor, (Edizione in castellano di BELL, R. y CORNELIUS, M. (1988), *Board Games Round the World*, Cambridge University Press, Cambridge).

BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J.H. e GUY, R.K. (1982), *Winning Ways: for your mathematical plays*, Vol. 2, Games in particular, Academic Press Inc., London, pp.697-734.

CARRILLO YAÑEZ, J., CONTRERAS GONZÁLEZ, L.C. (1997), "La resolución de problemas en la construcción del conocimiento. Un ejemplo", en *Revista Suma*, número 24, páginas 21-25.

CONTRERAS GONZÁLEZ, L.C. (1998), *Resolución de problemas: un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*, tesis Doctoral, Universidad de Huelva, dirigida por Carrillo Yañez J.

CONTRERAS GONZÁLEZ, L.C. (2009), "El papel de la resolución de problemas en el aula", Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología, Volumen 1, Número 1, Páginas 37-98.

CHI, M. T. H. e GLASER, R. (1983), *Problem solving abilities*, University of Pittsburgh, Learning research and development center.

CORBALÁN, F. (1994), *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.

CORBALÁN, F. (1997), *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipologia de jugadores en el alumnado de secundaria*, tesis doctoral, Facultat de Ciències de l'Educació, Departament de Didàctica de la Matemàtica y de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, presentada en el a.a. 1996/97, tutor Deulofeu Piquet, J.

DE GUZMÁN, M. (1984a), "Juegos matemáticos en la enseñanza", in *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, 10-14 settembre 2014*, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton.

DE GUZMÁN, M. (1984b), *Cuentos con cuentas*, Editorial Labor, S.A, Barcelona.

DE GUZMÁN, M. (1991), *Para pensar Mejor*, Editorial Labor, Barcelona.

DE GUZMÁN, M. (1992), "Tendencias innovadoras en educación matemática", en *Boletím da SPM*, n° 25, pp. 9-34

DE GUZMÁN, M. (2000), *Pensamientos entorno al quehacer matemático*, CD-Rom, Universidad Complutense de Madrid

DE GUZMÁN, M. (2004), "O sentido da educação matemática e a orientação actual do nosso sistema educativo", in *Educação e Matemática*, n° 78, pp. 21-23.

DECRETO N° 23 (2007), “Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria”, *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, n° 126 de 29 mayo 2007, Sección I.A: Comunidad de Madrid, Disposiciones generale, Consejería de Educación, pp. 48-139, España.

DECRETO N° 48 (2015), “Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria”, *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, n° 118 de 20 mayo 2015, Sección I.A: Comunidad de Madrid, Disposiciones generale, Consejería de Educación, Juventud y Deporte, pp. 10-309, España.

DÉNIZ, G. (1997), “El solitario: un juego con mucho juego”, *Números*, n° 31, pp. 3-14.

DEZA, A. e ONN, S. (2002), “Solitaire Lattices”, *Graphs and Combinatorics*, Springer-Verlag, pp. 227-243.

GARDNER, M. (1966), *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1983), *Circo matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GARRIS, R., AHLERS, R. e DRISKELL, J.E. (2002), “Games, Motivation and Learning: A research and practice model”, en *Simulation and Gaming*, Vol. 33, n° 4, pp. 441-467.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (1988), “Mathematical thought: A classroom experience”, in VV.AA. *El professor y la experiencia curricular*, University of Seville publications, pp.. 107-112.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (1990), “Strategic games in the curriculum of mathematics”, in VV.AA. *Cambio educativo y Desarrollo Profesional (Educational change and professional development)*, University of Seville Publications, pp. 323-330.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (1992), “Los juegos de estrategias en el curriculum de matemáticas”, *Colleción Apuntes IEPS*, n.° 55, Narcea, Madrid.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (2005), “Motivar a los alumnos de Secundaria a hacer matemáticas”, in *Curso Piloto, Matemáticas: Pisa en la Práctica* organizado por Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Instituto Superior de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación, Federación de Sociedades de profesores de Matemáticas.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (2014), *Modelling the use of fuzzy sets in the studio of solving problems heuristics in mathematics*, Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (2015), “Resolución de problemas como eje del aprendizaje matemático”, apuntes de la asignatura *Resolución de problemas y pensamiento matemático*, Master en Formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, Universidad de la Complutense de Madrid

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (en prensa), “Emotions and Heuristics: the state of perplexity in mathematics”, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª, BARBERO, M., ARZARELLO, F. (2016, en revisión), “Backwards reasoning: epistemology and didactical dimension”, *Symposium ETM 5*, University of Western of Macedonia, Greece.

HABERMAS, J. (1998), *On the pragmatics of communication*, Cambridge, MA: MIT Press.

HINTIKKA, J. (1996), *The Principles of mathematics revisited*, Cambridge University Press.

KIILI, K. (2005), “Digital game-based learning: Towards an experiential gaming model”, in *The Internet and Higher Education 8*, Elsevier Inc., pp. 13-24.

LEY LOE (2006), “Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación”, *Boletín Oficial del Estado*, n° 106 de 4 mayo 2006, Sección I: Disposiciones generale, Jefatura del Estado, pp. 17158-17207, España.

LEY LOGSE (1990), “Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenamiento General del Sistema Educativo”, *Boletín Oficial del Estado*, n° 238 de 4 octubre 1990, Sección I: Disposiciones generale, Jefatura del Estado, pp. 28927-28942, España.

LEY LOMCE (2013), “Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa”, *Boletín Oficial del Estado*, n° 295 de 10 diciembre 2013, Sección I: Disposiciones generale, Jefatura del Estado, pp. 97858-97921, España.

MARTIGNONE, F. & SABENA, C. (2014), “Analysis of argumentation processes in strategic interaction problems”, in *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vancouver, Canada, pp. 218-223.

MASON, J., BURTON, L. e STACEY, K. (1982), *Thinking mathematically*, Addison-Wesley Editors, Wokingham, United Kingdom.

PESCI, A., *I suggerimenti della ricerca in didattica della matematica per la pratica scolastica. Appunti per il corso di Didattica della Matematica*, Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, anno accademico 2007/08

POLYA, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press.

POLYA, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, Editor Trillas, Mexico, (Edizione in castellano di POLYA, G. (1945), *How to solve it?*, Princeton University Press, USA).

PRENSKY, M. (2005), “Computer games and learning: digital game-based learning”, in *Handbook of computer games studies*, Reassens, J. e Goldstein, J. Editors, MIT Press, Cambridge.

SAADA-ROBERT, M. (1989), La microgénèse de la representation d’un problème, *Psychologie Française*, 34, 2/3

SANTOS TRIGO, M. (2008), “La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica”, en Investigación en educación matemática XII, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

SANTOS-TRIGO, M. & MORENO-ARMELLA, L (2013), “Mathematical Problem-Solving by Prospective Teachers”, in *Montana Mathematics Enthusiast Journal*, Special volume to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, 10 (1 e 2), Age Publishing, Montana, USA.

SCHOENFELD, A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, New York, Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1992), “Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics”, en D. A. Grows Edition, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370), NY, Macmillan.

SCHOENFELD, A. H. (2007), “Problem solving in the United States, 1970-2008: Research and theory, practice and politics”, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, pp.537-551.

SCHOENFELD, A. H. (2013), “Reflections on Problem Solving Theory and Practice”, *The Mathematics Enthusiast*, vol. 10,1/2, pp. 9-34.

SHER, G. (1999), What is Tarski’s Theory of Truth?, *Topoi 18*, p. 149-166

SHUTE, V.J., RIEBER, L., & VAN ECK, R. (2011), "Games ... and ... learning", in *Trends and issues in instructional design and technology (3rd ed.)*, R. Reiser & J. Dempsey Editors, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, pp. 321–332.

SOLDANO, C., and ARZARELLO, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking, *Mathematics Education Research Journal*, 28, (1), 9-30.

TORRES SEGURA, M.d.M. (2006), "Aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas", *Aldadis.net La revista de educación*, número 10.

VAGIAS, W. M. (2006), *Likert-type scale response anchors*, Clemson International Institute for Tourism & Research Development, Department of Parks, Recreation and Tourism Management, Clemson University.

PÁGINAS WEB CONSULTADAS

BELL, G. (2016), "*Peg Solitaire"*, *comcast.net*, fecha de actualización de la página 20 enero 2016, consultada el 3 febrero 2016

APÉNDICE: ANEXOS

ANEXO I

Posible resolución del problema de las Alubias y del problema de los Caminos utilizando el razonamiento regresivo

<u>Posible resolución del Problema 1</u> (Gómez-Chacón, 2014)

Utilizamos el razonamiento regresivo *suponiendo el problema resuelto*.

Resultado: en los dos sacos, después de todos los movimientos, hay el mismo número de alubias blancas en el saco rojo que rojas en el saco blanco.

Definimos:

B: número total de alubias en el saco blanco

R: número total de alubias en el saco rojo

b_B: número de alubias blancas que hay en el saco blanco al terminar los movimientos de alubias de un saco al otro

b_R: número de alubias blancas que hay en el saco rojo al terminar los movimientos de alubias de un saco al otro

r_B: número de alubias rojas que hay en el saco blanco al terminar los movimientos de alubias de un saco al otro

r_R: número de alubias rojas que hay en el saco rojo al terminar los movimientos de alubias de un saco al otro

Dado que al comienzo todas las alubias blancas están en el saco blanco y todas aquellas rojas en el saco rojo podemos escribir las dos ecuaciones que ilustran las configuraciones iniciales:

$$B = b_B + b_R$$

$$R = r_B + r_R$$

Mientras que al terminar el proceso las dos configuraciones serán:

$$B = b_B + r_B$$

$$R = b_R + r_R$$

Podemos entonces igualar las ecuaciones obteniendo:

$$B = b_B + b_R = b_B + r_B$$

Que implica:

$$b_R = r_B$$

Hemos entonces averiguado que al terminar el proceso el número de alubias blancas en el saco rojo es igual al número de alubias rojas en el saco blanco.

<u>Posible resolución del Problema 2</u> (Gómez-Chacón, 2014)

Utilizamos el razonamiento regresivo *empezando por el final* del problema.

Todos los caminos terminan con el único número 7 que aparece en la figura adjunta al problema que está situado al centro de la base del triángulo. El problema resulta más sencillo si empezamos a contar los caminos comenzando desde el final del problema, o sea si buscamos todos los posibles 7654321, en una sucesión de segmentos horizontales y verticales (Gómez-Chacón, 2014).

Teniendo en cuenta la simetría del problema podemos empezar a considerar la mitad izquierda del triángulo como en la imagen A1.1.

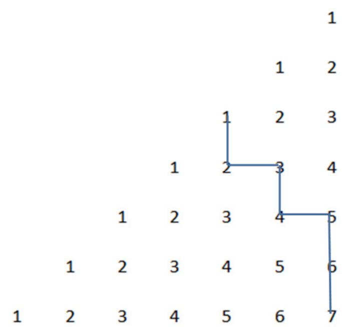


Imagen A1.1

Empezando con el 7, refiriéndonos a la imagen A1.1 a cada paso podemos elegir dos distintas direcciones: hacia la izquierda y hacia arriba. Dado que cada camino tiene 6 pasos desde el 7 hasta el 1, existen 2^6 caminos en esta imagen. Teniendo en cuenta la simetría en la mitad derecha del triángulo existirán otros 2^6 caminos.

Observamos que el camino central, o sea aquello que termina en el vértice arriba del triángulo ha sido contado dos veces. Entonces existen:

total caminos mitad izquierda + total caminos mitad derecha - un camino común

$2^6 + 2^6 - 1$ caminos, o sea:

$2^6 + 2^6 - 1 = 127$ caminos.

El resultado será entonces 127 caminos totales.

ANEXO II

Estrategias de resolución de los Solitarios propuestos – Estudio previo

Hay distintas estrategias de resolución de los Solitarios propuestos:

1. *Utilizar una notación adecuada*

Es importante asociar una notación adecuada a las casillas de los tableros, cada uno puede elegir aquella que le parece más adecuada.

- Notación cartesiana

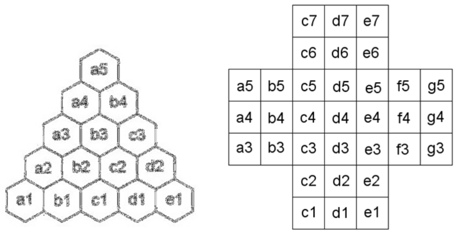


Imagen AII.1 – Ejemplo de notación cartesiana de los tableros del Solitario Triangular y del Solitario de la Bastilla

Se pueden entonces representar los movimientos: a5→a3 (en el tablero triangular) o c7-e7 (en el tablero en forma de cruz)

- Notación numérica progresiva

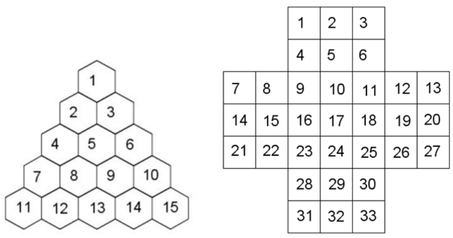


Imagen AII.2 – Ejemplo de notación numérica progresiva de los tableros del Solitario Triangular y del Solitario de la Bastilla

Se pueden entonces representar los movimientos: 1→6 (en el tablero triangular) o 7-21 (en el tablero en forma de cruz)

2. *Estudiar los posibles movimientos de cada posición en el tablero*

Los posibles movimientos se pueden esquematizar en dos maneras distintas:

- Estudio de cuantos movimientos se pueden hacer en cada posición

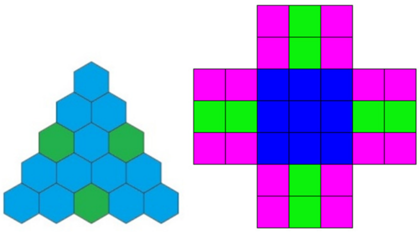


Imagen AII.3 – Esquematización del número de movimientos para cada casilla de los tableros del Solitario Triangular y del Solitario de la Bastilla

Observando el tablero del Solitario Triangular de la Imagen AII.3 las fichas en el área azul se pueden mover en dos direcciones mientras que las fichas en las casillas verdes en cuatro direcciones.

Observando el tablero del Solitario de la Bastilla de la Imagen AII.3 las fichas en el área azul se pueden mover en cuatro direcciones, las fichas en el área violeta se pueden mover en dos direcciones mientras que las fichas en las casillas verdes en una única dirección.

- Estudio de las posibles posición de cada ficha

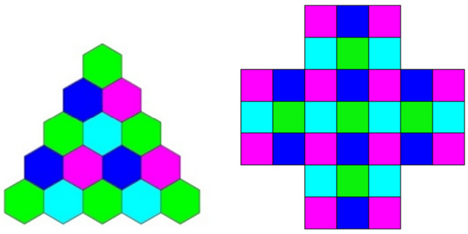


Imagen AII.4 – Esquematización de los posibles movimientos para cada casilla de los tableros del Solitario Triangular y del Solitario de la Bastilla

Las fichas que al comienzo del juego se encuentran en una posición de un cierto color durante el juego podrán moverse solamente sobre otras casillas del mismo color.

3. *Sacar partido de la simetría*

Ambos tableros tienen ejes de simetría, 3 para el tablero triangular (las mediatrices de los lados) y 4 para el tablero en forma de cruz (los ejes horizontal, vertical y los dos oblicuos). Esto nos permite decir que obtenida una solución para el Solitario Triangular habrá otras 5 configuraciones simétricas a esta, mientras que para cada solución del Solitario de la Bastilla las simétricas serán 7.

4. *Ensayo – Error*

Consiste en hacer una prueba de resolución y evaluar si lleva a la solución o menos. Si no funciona se vuelve un poco atrás en el proceso de resolución y se modifican los movimientos a partir de un cierto punto; se intenta así alcanzar la solución utilizando una configuración modificada en algunas partes respecto a la primera desarrollada.

No es aconsejable utilizar esta estrategia para la resolución del Solitario de la Bastilla dado el elevado número de fichas en el tablero y de movimientos posibles.

5. *Experimentar y Extraer pautas*

Consiste en el empezar desde configuraciones pequeñas de fichas en el tablero e intentar encontrar una regla común que permita llegar a una solución de los casos particulares, para después intentar generalizar el proceso para configuraciones con más elementos.

6. *Resolver un problema más sencillo*

Consiste en el empezar a resolver algunas configuraciones más sencillas, o sea con menos fichas en el tablero utilizando para alcanzar la solución las mismas reglas del juego. Algunas configuraciones del Solitario de la Bastilla podrían ser las de la Imagen AII.5.

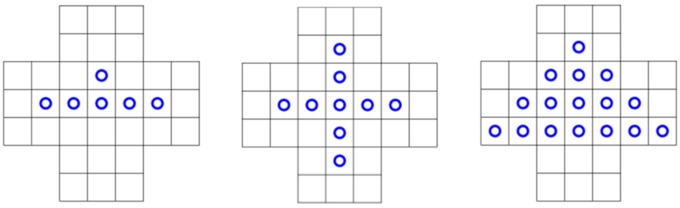


Imagen AII.5 – Posibles configuraciones más sencillas para el Solitario de la Bastilla

Curioso el caso de la configuración a diamante de la Imagen AII.6, donde empezando por la configuración de la izquierda se puede pasar por la configuración de la derecha hasta alcanzar la solución.

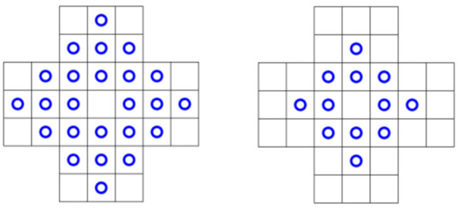


Imagen AII.6 – Posibles configuraciones más sencillas para el Solitario de la Bastilla

7. *Descomponer el problema en problemas más pequeños*

Consiste en el intentar de descomponer el tablero en partes siguiendo también la su simetría.

Hay distintas maneras de subdividir los tableros para alcanzar la solución; muy interesante es la solución que propone De Guzmán (1948b) para el Solitario de la Bastilla. Subdivide el tablero en “bloques”, o sea en conjuntos de fichas, y a través de un "catalizador", o sea una ficha externa al bloque elimina todas las fichas que forman parte del bloque. Representamos los "bloques" con fichas azules y el "catalizador" con una ficha violeta. Los cuadrados blancos representan aquellas casillas que en el tablero tienen que permanecer vacías para permitir desocupar el conjunto básico. La solución de cada bloque es sencilla y no aparece en esta memoria.

- Tipo 1: bloque rectangular 3x2 con dos casillas externamente

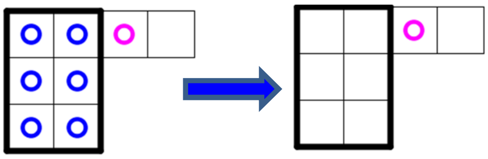


Imagen AII.7 – Vaciamiento del bloque Tipo 1

- Tipo 2: bloque rectangular 3x2 con cuatro casillas externamente

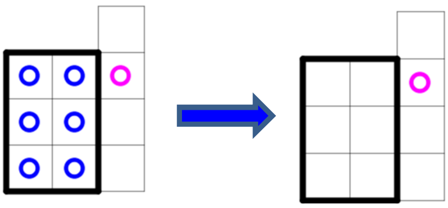


Imagen AII.8 – Vaciamiento del bloque Tipo 2

- Tipo 3: bloque a "L" con dos casillas externamente

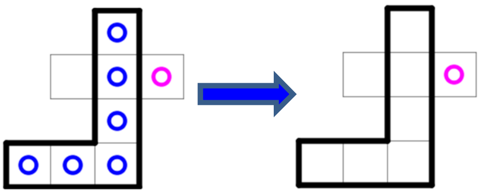


Imagen AII.9 – Vaciamiento del bloque Tipo 3

- Tipo 4: bloque a "L" con tres casillas externamente

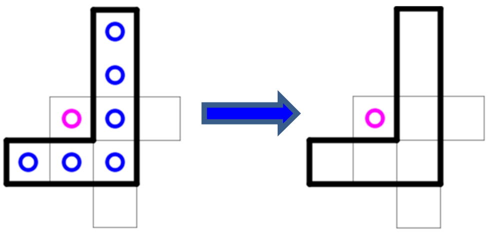


Imagen AII.10 – Vaciamiento del bloque Tipo 4

Una de las posibles soluciones utilizando estos macro-movimientos es aquella representada en la Imagen AII.11.

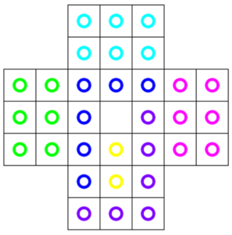


Imagen AII.11 – Esquema de resolución del Solitario de la Bastilla utilizando los "bloques" mostrados

Después del primer movimiento utilizando las fichas en amarillo (29-17) se vacía el bloque verde (Tipo 1 después de una simetría respecto del eje horizontal), sucesivamente el bloque a "L" violeta (Tipo 3) y después el bloque rectangular azul (Tipo 1 después de una rotación de -90°). A este punto se vacía el bloque rosa (Tipo 2 después de una simetría respecto del eje vertical) y en fin el bloque a "L" azul (Tipo 4 después de una rotación de 180°). La solución entonces será:

29-17, 22-24, 8-22, 21-23, 7-21, 24-22, 21-23, 26-24, 33-25, 31-33, 18-30, 33-25, 24-26, 6-18, 4-6, 3-11, 1-3, 18-6, 3-11, 27-25, 20-18, 18-6, 13-11, 6-18, 25-11, 17-15, 28-16, 16-4, 11-9, 4-16, 15-17

Hay otras maneras de subdividir el tablero con distintos tipos de conjuntos. Bell (2016) propone aquello de la Imagen AII.12 donde resolviendo los bloques a "L" en sentido anti-horario se alcanza una configuración particular (Imagen AII.13) a este punto utiliza la estrategia *resolver un problema más sencillo* solucionando la configuración encontrada.

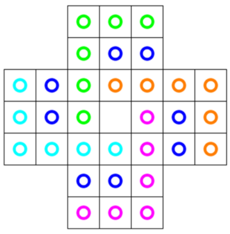


Imagen AII.12 – Esquema de resolución del Solitario de la Bastilla propuesto por Bell

Con una serie de movimientos efectuados con la misma ficha (la roja en la Imagen AII.14) obtiene la configuración a "T" de la Imagen AII.15 que es muy sencilla de resolver.

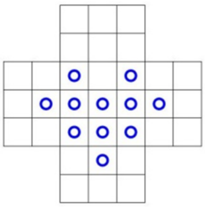


Imagen AII.13

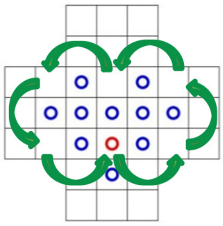


Imagen AII.14

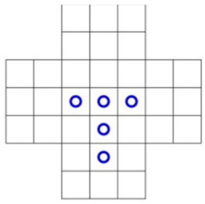


Imagen AII.15

Imágenes AII.13-15 – Combinación de la estrategia de descomponer el problema con aquella de resolver un problema más sencillo para resolver el Solitario de la Bastilla

La solución será: 5-17, 8-10, 1-9, 3-1, 16-4, 1-9, 28-16, 21-23, 7-21, 24-22, 21-23, 26-24, 33-25, 31-33, 18-30, 33-25, 6-18, 13-11, 27-13, 10-12, 13-11, 24-26, 26-12, 12-10, 10-8, 8-22, 22-24, 17-15, 29-17, 18-16, 15-17

8. *Utilizar el razonamiento regresivo (empezar por el final/suponer el problema resuelto)*

Consiste en empezar con una única ficha en una posición específica y poco a poco llenar el tablero utilizando las reglas al revés, o sea: la ficha puede moverse si tiene a su lado dos casillas vacías consecutivas, la ficha "salta" en el hueco más lejos y otra ficha se posiciona en la posición en la mitad. Las fichas pueden moverse según las direcciones que especifican las reglas del solitario.

Por ejemplo un movimiento derecha-izquierda (que sería el movimiento inverso de izquierda-derecha con las reglas originales) puede ser esquematizado así:

1. Posición del comienzo:

Imagen AII.16 – Posición inicial de la ficha para el uso del razonamiento regresivo

2. Salto de la ficha en el hueco más lejos (se introduce una nueva ficha en la posición roja):

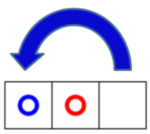


Imagen AII.17 – Movimiento de las fichas en el uso del razonamiento regresivo

3. Posición final:

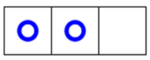


Imagen AII.18 – Posición final de las fichas en el uso del razonamiento regresivo

Llenando el tablero se pueden buscar configuraciones que llamamos *configuraciones ganadoras* que permiten alcanzar la solución utilizando las reglas normales del juego, cuando se hace esto se utiliza al mismo tiempo del razonamiento regresivo la estrategia de resolver problemas más sencillos.

ANEXO III

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Cátedra Miguel de Guzmán

Cuestionario

Nombre y Apellidos: ____
Sexo: _____________
Edad: _____________
Curso: _____________

Te pedimos tu colaboración para responder a este cuestionario. Te planteamos preguntas sobre cómo has trabajado y tu opinión sobre ellas. Para cada cuestión responde lo que consideres es mejor.

1. ¿Cómo de difícil te ha resultado resolver este problema?

Nada	Rara Vez	Algunas Veces	Con frecuencia	Siempre
○	○	○	○	○

2. Explica por qué te era difícil

3. Explica que estrategias has utilizado para resolverlo

4. La estrategia de empezar por el final y trabajar marcha atrás, desde el final hacia el principio, es muy útil para abordar situaciones en las que se conoce el objetivo o la meta final.

Indica con qué frecuencia utilizas esta estrategia de vuelta atrás en tus clases de matemáticas durante el curso escolar.

Nada	Rara Vez	Algunas Veces	Con frecuencia	Siempre
○	○	○	○	○

5. Ahora piensa de nuevo en el problema que acabas de resolver. Indica si has utilizado esta estrategia y con qué frecuencia

5.1. SI/NO

5.2 Con qué frecuencia

Nada Rara Vez Algunas Veces Con frecuencia Siempre

6. ¿Por qué la has utilizado? o ¿Por qué no las has utilizado? Explica la razón de su uso o no uso en tu caso.

7. Si no las has utilizado esta estrategia, señala que tipo de procesos consideras te han faltado. Indica con una cruz cuál o cuáles de ellos:

- Acciones involucradas básicamente en la determinación del modelo matemático
- Obtención de condiciones suficientes
- Acciones de descubrimiento
- Reconocimiento y explicitación del sentido de la equivalencia representacional
- Creación del objeto solución
- Formulación de axiomas
- Caracterización y establecimiento de relaciones
- Obtención justificaciones de condiciones suficientes en equivalencias proposicionales

Nota: Puedes justificar tus afirmaciones con “extractos del problema”.

8. Responde sobre tus emociones al resolver el problema

8.1. ¿Has experimentado perplejidad en la realización del problema?

Nada Rara Vez Algunas Veces Con frecuencia Siempre

8.2. ¿Qué estabas haciendo en el problema cuando experimentabas perplejidad?

8.3 Indica con qué frecuencia has experimentado algunas de estas emociones

Confusión	Nada Rara Vez Algunas Veces Con frecuencia Siempre
Incertidumbre	Nada Rara Vez Algunas Veces Con frecuencia Siempre

Confianza	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌
Frustración	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌

8.4 Indica con qué frecuencia has experimentado los siguientes procesos cuando estabas perplejo

He controlado la situación	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌
Comprendía bien la situación	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌
He hecho bastante esfuerzo	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌
He estado atento y concentrado en el problema	Nada ◌ — Rara Vez ◌ — Algunas Veces ◌ — Con frecuencia ◌ — Siempre ◌

ANEXO IV

Preguntas de la entrevista estructurada

1. Narra la resolución de los cuatro problemas especificando las dificultades que has encontrado.
2. ¿Cuáles estrategias has utilizado?
3. ¿Dónde, cómo y por qué has utilizado la estrategia del razonamiento regresivo en la resolución de los problemas?
4. ¿Te das cuenta que estas utilizando dicha estrategia?
5. ¿Te parece útil dicha estrategia?
6. ¿Cuándo la utilizas?
7. ¿Te han explicado el uso de esta estrategia alguna vez?
8. ¿Cuál es la rutina que utilizas para la resolución de un problema en el aula? ¿Cómo empiezas a trabajar?
9. ¿Confías en tu intuición?
10. ¿Utilizas juegos en tu tiempo libre?
11. ¿Qué tipo de juegos prefieres? ¿Juegos de mesa o juegos tecnológicos/on-line?
12. ¿Prefieres jugar en pareja o solo/a?
13. ¿Qué piensas de un posible uso de los juegos en clase?
14. ¿Conoces algunas de estas estrategias?
    - i. Analizar los casos límite.
    - ii. Deducir y sacar conclusiones.
    - iii. Descomponer el problema en pequeños problemas. (Simplificar)
    - iv. Empezar por lo fácil, resolver un problema más sencillo.
    - v. Ensayo-Error.
    - vi. Experimentar y extraer pautas. (Inducir)
    - vii. Hacer conjeturas.
    - viii. Manipular y experimentar manualmente.
    - ix. Principio del Palomar.
    - x. Realizar dibujos y representaciones gráficas.
    - xi. Realizar esquemas y tablas.
    - xii. Realizar un estudio sistemático de todos los casos. (Recuento)
    - xiii. Reformular el problema.
    - xiv. Resolver problemas análogos.
    - xv. Sacar partido de la simetría.
    - xvi. Seguir un método, organizarse.
    - xvii. Suponer que no. (Reducción al absurdo)
    - xviii. Utilizar el razonamiento regresivo. (Empezar por el final - Suponer el problema resuelto)
    - xix. Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico.