

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO

SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica



Tesi di Laurea Magistrale

**GIOCHI DI STRATEGIA E RISOLUZIONE DI PROBLEMI:
L'USO DELLA STRATEGIA DEL RAGIONAMENTO REGRESSIVO**

Relatore:

Ferdinando Arzarello

Correlatore:

Inés Gómez-Chacón

Candidato:

Marta Barbero

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

“Il gioco e la bellezza stanno all’origine di una gran parte della matematica. Se i matematici di tutti i tempi l’hanno vissuta così bene giocando e contemplando il suo gioco e la sua scienza, perché non cercare di apprenderla e comunicarla attraverso il gioco e la bellezza?”

Miguel de Guzmán, *Cuentos con Cuentas*

INDICE

Introduzione. Esposizione della ricerca	1
Capitolo 1. I giochi di strategia e la risoluzione di problemi.....	7
1.1 . L'utilizzo dei giochi nella didattica	7
1.2. L'utilizzo dei giochi di strategia nella didattica	23
1.2.1. Giochi di strategia e...	23
1.2.2. ...problemi matematici.....	25
1.2.3. Euristiche: giochi di strategia e risoluzione di problemi	32
1.3. Panoramica dei giochi nella storia della matematica	38
Capitolo 2. Metodologia di ricerca	49
2.1. Ambito di ricerca	49
2.2. Metodo di ricerca	50
2.3. Disegno degli strumenti di raccolta dei dati	52
2.3.1. Questionari attitudinali	52
2.3.2. Protocolli di risoluzione individuali	53
2.3.3. Questionari finali	60
2.3.4. Colloqui individuali.....	61
2.4. Analisi dei dati	62
2.4.1. Strategia di analisi dei questionari attitudinali.....	62
2.4.2. Strategia di analisi dei protocolli di risoluzione	64
2.4.3. Strategia di analisi dei questionari finali.....	71

2.4.4.	Strategia di analisi dei colloqui individuali	71
Capitolo 3.	Analisi dei giochi: Euristiche e Contenuto matematico	73
3.1.	Solitario della Bastiglia.....	73
3.1.1.	Tavolo da gioco e pedine	73
3.1.2.	Storia.....	74
3.1.3.	Regole	76
3.1.4.	Analisi dei movimenti e delle strategie	77
3.1.5.	Varianti	85
3.1.6.	Giochi analoghi	86
3.2.	Solitario Triangolare	91
3.2.1.	Tavolo da gioco e pedine.....	92
3.2.2.	Storia	92
3.2.3.	Regole.....	92
3.2.4.	Analisi dei movimenti e delle strategie	93
3.2.5.	Varianti	97
3.2.6.	Giochi Analoghi	99
3.3.	Che matematica sta alla base dei due solitari analizzati?	102
Capitolo 4.	Analisi dei questionari attitudinali	113
4.1.	Primo questionario: Esperienza nei giochi	113
	Osservazioni sul primo questionario.....	120
4.2.	Secondo questionario: I giochi e il loro uso nella didattica.....	121
	Osservazioni sul secondo questionario	128
4.3.	Terzo questionario: Autoritratto euristico	129
	Osservazioni sul terzo questionario	148
4.4.	Conclusioni all'analisi dei questionari attitudinali.....	149

Capitolo 5. Analisi generale del gruppo di studio	153
5.1. Utilizzo delle strategie di risoluzione	155
5.1.1. Problema dei Fagioli	157
5.1.2. Problema dei Cammini	163
5.1.3. Solitario Triangolare	167
5.1.4. Solitario della Bastiglia	172
5.2. Comparazione delle strategie usate	175
5.3. Efficacia delle strategie usate	177
5.3.1. Problema dei Fagioli	178
5.3.2. Problema dei Cammini.....	179
5.3.3. Solitario Triangolare.....	180
5.3.4. Solitario della Bastiglia.....	182
Osservazioni sull'analisi dell'efficacia delle strategie	183
5.4. Approfondimento: La strategia del ragionamento regressivo	183
5.4.1. Problema dei Fagioli	186
5.4.2. Problema dei Cammini.....	190
5.4.3. Solitario Triangolare.....	195
5.4.4. Solitario della Bastiglia.....	201
Considerazioni sull'uso del ragionamento regressivo	203
5.5. Conclusioni all'analisi generale del gruppo di studio.....	206
Capitolo 6. Analisi approfondita dei protocolli di risoluzione: Studio di caso	215
6.1. Primo studio di caso: Miriam	217
6.1.1. Problema dei Fagioli	220
Considerazioni sulla risoluzione del problema	236
6.1.2. Problema dei Cammini.....	240

Considerazioni sulla risoluzione del problema.....	252
6.1.3. Solitario Triangolare	254
Considerazioni sullo svolgimento del solitario.....	269
6.1.4. Solitario della Bastiglia	273
Considerazioni sullo svolgimento del solitario.....	280
6.2. Secondo studio di caso: Martín	282
6.2.1. Problema dei Fagioli	283
Considerazioni sulla risoluzione del problema.....	286
6.2.2. Problema dei Cammini	287
Considerazioni sulla risoluzione del problema.....	290
6.2.3. Solitario Triangolare	291
Considerazioni sullo svolgimento del solitario.....	303
6.2.4. Solitario della Bastiglia.....	306
Considerazioni sullo svolgimento del solitario.....	320
6.3. Conclusioni allo studio di caso.....	323
Conclusioni	331
Bibliografia	343
Sitografia	346

INTRODUZIONE

ESPOSIZIONE DELLA RICERCA

L'obiettivo della ricerca che si presenta in questa tesi è lo studio dei procedimenti euristici che si sviluppano sia nell'approccio a giochi di strategia che nella soluzione di problemi matematici, con un'attenzione particolare alla strategia del ragionamento regressivo.

Dalla seconda metà del XX secolo la risoluzione dei problemi, come proposta di insegnamento e di apprendimento, è stata una delle aree più sviluppate nell'ambito dell'educazione matematica (Polya, 1965; Schoenfeld, 1985; Mason, Burton e Stacey; 1982; Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2013). Di più recente sviluppo è, invece, il tema dell'utilizzo dei giochi nella didattica (Garris, 2002; Kiili, 2005; Shute, 2011) e in particolare in quella della matematica (Martignone & Sabena, 2014; Gómez-Chacón, 2005; Guzmán 1984 e 2000).

L'interesse speciale per la ricerca attinente l'insegnamento e l'apprendimento della risoluzione dei problemi è radicato nel fatto che le attuali Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento relativi all'insegnamento della matematica enfatizzano la risoluzione dei problemi come una delle competenze principali. Nella scheda per la certificazione delle competenze di base rilasciata all'assolvimento dell'obbligo, in allegato al Decreto Ministeriale n. 9 del 27 gennaio 2010, è infatti richiesta una valutazione rispetto al livello raggiunto in 16 competenze diverse tra cui, nella sezione riguardante l'asse matematico, questa:

“Individuare le strategie appropriate per la risoluzione dei problemi”.

Come nel nostro paese, anche nei decreti legislativi degli altri Stati europei viene sottolineata l'importanza di questa competenza. Per esempio, in Spagna, nell'allegato

2 “Materias de Educación Secundaria Obligatoria” al Real Decreto 1631/2006, del 29 dicembre, con il quale si stabiliscono le linee programmatiche di base per l’insegnamento in Educación Secundaria Obligatoria, in riferimento all’articolo 8, comma 1, nella sezione riguardante la matematica, troviamo:

“In tutti gli anni di studi si è incluso un blocco di contenuti comuni che costituisce l’asse trasversale strutturale delle conoscenze matematiche. Questo blocco fa espressamente riferimento, tra gli altri, a un tema base del piano di studi: la risoluzione dei problemi. Da un punto di vista formativo, la risoluzione dei problemi è capace di attivare le capacità di base dell’individuo, quali leggere comprendendo, riflettere, stabilire un piano di lavoro, revisionarlo, adattarlo, generare delle ipotesi, verificare la fondatezza della soluzione, etc.”

L’importanza crescente attribuita alla risoluzione dei problemi nelle differenti linee programmatiche ha portato a considerare i giochi di strategia un elemento chiave nel processo di insegnamento. Infatti questi possono essere utilizzati, oltre che per introdurre nuovi contenuti, anche e specialmente per favorire l’apprendimento dei distinti aspetti (processi, fasi, ...) della risoluzione dei problemi; essi costituiscono quindi un importante strumento metodologico per il suo insegnamento (Gómez-Chacón, 1992).

La relazione tra i giochi di strategia e la risoluzione dei problemi è radicata nel fatto che, per risolverli, è necessario seguire gli stessi processi euristici. Gómez-Chacón (1992) sostiene che le fasi di risoluzione di entrambi coincidono. L’analogia di questa struttura permette, in entrambi, di utilizzare gli stessi strumenti e di esercitare gli stessi processi di pensiero necessari per lo sviluppo dei procedimenti tipici del pensiero matematico. Vedremo nel capitolo 1 di questo lavoro come le azioni e le strategie utilizzate nella risoluzione praticamente coincidano.

Una delle tecniche che comunemente si possono utilizzare per la risoluzione dei giochi di strategia e dei problemi è quella del *ragionamento regressivo*. Corbalán (1994 e 1997) sostiene che la stragrande maggioranza degli studenti considera l’uso del

ragionamento regressivo, in contesti matematici, come una “tecnica artificiosa”, applicabile solo nei casi visti in aula e che dimostra qualcosa che è già stato dimostrato. Non sa quando, come e perché utilizzarlo, non capisce il meccanismo generale, tendendo quindi a memorizzare gli artifici utilizzati nei casi presentati in classe e a non considerarlo come una procedura generale. Incuriositi e preoccupati da queste considerazioni, ci siamo chiesti se l’uso dei giochi di strategia non avrebbe potuto aiutare a migliorare l’attitudine degli studenti nei confronti di questa tecnica risolutiva e di conseguenza le capacità di utilizzarla autonomamente, anche al di fuori di casi specifici.

La ricerca che si presenta in questo lavoro ha un carattere esplorativo e cerca di rispondere alla questione. Lo studio fa parte di un progetto di ricerca più ampio sul *Pensiero Matematico e la Risoluzione dei Problemi* (Pensamiento Matemático y Resolución de Problemas) realizzato all’interno della Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid e vincolato al programma Investigación en Educación Matemática Universitaria (INVEDUMAT_uni) del Instituto de Matemática Interdisciplinar.

L’ipotesi di partenza del nostro studio era:

H: La strategia del ragionamento regressivo si sviluppa maggiormente nella risoluzione dei giochi di strategia rispetto a quanto si sviluppa in quella dei problemi.

Abbiamo concentrato le nostre attenzioni sugli studenti del Grado en Matemáticas (Laurea di Primo Livello) che hanno scelto un percorso di studi indirizzato all’insegnamento della materia. Gli obiettivi generali della nostra ricerca sono stati:

O1: Esplorare, con studenti universitari del quarto anno potenzialmente futuri docenti, i procedimenti euristici che si sviluppano sia nell’approccio a giochi di

strategia che nella soluzione di problemi matematici.

O2: Analizzare con la lente della Logica della Ricerca lo sviluppo del pensiero strategico nella ricerca di una strategia vincente da parte di studenti scelti del gruppo di studio osservati mentre risolvono problemi matematici e affrontano giochi di strategia.

Per raggiungere questi obiettivi generali ci siamo focalizzati sui quesiti che seguono:

- Quali strategie vengono sviluppate nella risoluzione dei problemi e dei giochi proposti?
- Le strategie vengono sviluppate maggiormente nella risoluzione dei giochi proposti o in quella dei problemi?
- Quali sono i percorsi logici che portano allo sviluppo di una strategia vincente?

Osservando questo gruppo di studenti ne abbiamo approfittato per indagare anche sulle loro attitudini nei confronti dell'uso dei giochi nella didattica della matematica.

Abbiamo cercato di rispondere quindi ad un ulteriore quesito:

- Quali sono le attitudini degli studenti, potenzialmente futuri docenti, nei confronti dell'uso dei giochi nella didattica?

Abbiamo quindi precisato i seguenti obiettivi specifici:

1. Valutare le attitudini nei confronti dell'uso dei giochi nella didattica, in studenti futuri docenti;
2. Analizzare l'uso delle strategie di risoluzione nei problemi e nei giochi proposti, nello specifico:
 - a. Analizzare quali particolari e diverse strategie vengono sviluppate nelle differenti risoluzioni;
 - b. Studiare la differenza nello sviluppo delle diverse strategie nella risoluzione dei problemi e nella risoluzione dei giochi;
3. Analizzare in particolare lo sviluppo della strategia del ragionamento regressivo;
4. Analizzare i percorsi di pensiero che portano alla formulazione di una strategia vincente.

La ricerca è stata realizzata con 32 studenti del corso di Matemáticas para la Enseñanza (anno accademico 2014-2015) che fa parte dell'offerta formativa per gli studenti del quarto anno di studi del Grado en Matemáticas della Facultad de Matemática della Universidad de la Complutense di Madrid (UCM).

Nella ricerca si sono combinate la proposta di questionari attitudinali, la risoluzione di due problemi e due giochi attraverso la stesura di protocolli e la proposta di questionari di feed-back sulla risoluzione stessa. A tutto ciò è seguito lo studio approfondito di due casi scelti a partire dalle analisi dei questionari e dei protocolli di risoluzione.

La ricerca è stata organizzata in due fasi:

- ***Fase 1: Studio del gruppo classe***

Per valutare le attitudini degli studenti nei confronti dell'uso dei giochi nella didattica, vengono proposti due questionari che valutano:

- I. L'attitudine degli studenti nei confronti dei giochi di strategia e non;
- II. L'attitudine degli studenti nei confronti dell'uso dei giochi nella didattica.

Per analizzare lo sviluppo delle strategie vengono proposti, da risolvere tramite protocolli, due problemi e due giochi di strategia in cui una delle possibili strategie efficaci è quella del ragionamento regressivo.

- ***Fase 2: Studio di casi***

Per approfondire le strategie utilizzate e il loro sviluppo nei due casi oggetto di indagine, viene strutturato un colloquio individuale con una serie di domande che permettano di avere informazioni dettagliate sullo svolgimento dei protocolli di risoluzione e sulle difficoltà avute nella loro realizzazione.

L'analisi quantitativa dei dati è stata realizzata tramite l'uso di grafici e tabelle riassuntive.

L'analisi e i dati empirici dimostrano l'insufficienza del Modello per l'argomentazione di Stephen Toulmin (Boero e altri, 2010; Arzarello 2014). Abbiamo quindi concentrato l'attenzione, per l'analisi qualitativa, su due strutture metodologiche di interpretazione: la costruzione dei "comportamenti razionali" di Jürgen Habermas (Boero e altri, 2010; Martignone & Sabena, 2014) e "A Finer Logic of Inquiry Model", rielaborazione del Professor Ferdinando Arzarello della "Logica della ricerca" di Jaakko Hintikka (Arzarello 2014). Quest'ultima permette un'analisi semantica più approfondita dei processi di pensiero dei soggetti esaminati mentre elaborano una strategia vincente (si veda capitolo 2).

CAPITOLO 1

I GIOCHI DI STRATEGIA E LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI

1.1 . L'UTILIZZO DEI GIOCHI NELLA DIDATTICA

“I capitoli di questo libro sono stati precedentemente pubblicati nella sezione mensile fissa, “Mathematical Games” della rivista “Scientific American”. I matematici spesso mi chiedono che cosa significa per me quel titolo. Non è facile da spiegare. Già Ludwig Wittgenstein ha usato la parola “gioco” per illustrare il concetto di “parole-famiglia”, impossibili da definire in modo univoco. L'idea di “giocare” implica molti significati, collegati tra loro un po' come lo sono i membri di un'unica famiglia umana, significati che si sono concatenati durante il tempo in cui si evolveva la lingua. Possiamo dire che i “Giochi Matematici” o la “matematica ricreativa” sono matematica - non importa di quale tipo – arricchita con una forte componente ludica; ma poco chiariamo così, perché le idee di “gioco”, “ricreazione” e “divertimento” sono approssimativamente sinonimi.”

Martin Gardner (1983)

Sembra appropriato iniziare questo lavoro, che si occupa dell'uso dei giochi nell'insegnamento della matematica, dando una definizione di gioco. Come scrive giustamente Gardner, non è possibile definire in modo univoco la parola “gioco” quindi proviamo a vedere, tra le varie definizioni presenti nel *Dizionario* italiano *Treccani*, quali sono quelle che ci interessano di più per questo lavoro.

Le tre definizioni più significative di “gioco” sono:

1. “Qualsiasi attività liberamente scelta a cui si dedichino, singolarmente o in gruppo, bambini o adulti senza altri fini immediati che la ricreazione e lo svago, sviluppando ed esercitando nello stesso tempo capacità fisiche, manuali e intellettive”
2. “In etologia, l’insieme di azioni istintive e apprese con cui alcune specie di mammiferi e di uccelli sviluppano forme attive di apprendimento per lo più attraverso combinazioni di movimenti che simulano situazioni (caccia, lotta, ecc.) di importanza vitale per l’animale.”
3. “Pratica consistente in una competizione fra due o più persone, regolata da norme convenzionali, e il cui esito, legato spesso a una vincita in denaro (posta del gioco), dipende in maggiore o minor misura dall’abilità dei singoli contendenti e dalla fortuna”

Questi concetti, sintetizzati in un'unica definizione, li troviamo nell'opera *Homo Ludens* (1938) di Johan Huizinga, antropologo olandese, che scrive:

“Il gioco è una attività o occupazione volontaria eseguita con certi limiti fissi di tempo e di spazio, secondo regole liberamente accettate ma assolutamente vincolanti, che ha il suo fine in se stessa ed è accompagnata da un senso di tensione, di gioia e dalla consapevolezza che questo è ‘diverso’ dalla ‘vita ordinaria’.”

La più interessante tra le tre definizioni del dizionario Treccani è sicuramente la seconda che sottolinea il fatto che il gioco è una funzione biologica dell’evoluzione che ha una stretta relazione con l'apprendimento (Prensky, 2005), è la forma di apprendimento istintiva con la quale i cuccioli di ogni specie animale imparano a sopravvivere. Ma non dobbiamo pensare che questo concetto si riferisca solamente al mondo animale, è una caratteristica istintiva di tutti i cuccioli, anche di quelli dell’uomo, ovvero i bambini.

Piaget, come sottolinea Shute (2011), sostiene l'idea che i giochi e le imitazioni sono una essenza innata nelle strategie umane dello sviluppo cognitivo: i bambini infatti, tramite il gioco, sono in grado di testare i concetti di nuova formazione per consolidarli e poterli aggiungere al bagaglio di conoscenze già apprese e comprese. Ma non solo, il gioco può essere utilizzato, oltre che per analizzare i concetti in formazione, anche per introdurre nuovi concetti o processi mentali (Corbalán, 1994); esattamente come quando il bambino, alle prese con un classico gioco ad incastro (Figura 1.1), vede per la prima volta un cubo e impara, giocando, ad associarlo alla forma del quadrato (senza ovviamente conoscere né il concetto di cubo né quello di quadrato, che verranno appresi successivamente per mezzo di una fonte di conoscenza esterna, come può essere in questo caso la madre).



Figura 1.1

Il gioco ha un ruolo fondamentale come strumento della formazione educativa: è la prima forma di apprendimento che si sviluppa nell'individuo. Giocando infatti si mettono in atto dei processi di apprendimento che permettono di sviluppare nell'uomo come nell'animale, capacità specifiche utili nella vita reale; alcune conoscenze, che per l'adulto possono essere considerate "banali", in realtà vengono apprese tramite il gioco nei primi mesi di vita. Nei giochi ad incastro (Figura 1.1), per esempio, il bambino impara, provando e riprovando, ad associare le forme e i colori, iniziando quindi a sviluppare le abilità spaziali. Caratteristica fondamentale di questo apprendimento primordiale è il suo carattere attivo. Il bambino, infatti, non subisce passivamente ma è coinvolto attivamente nella risoluzione del gioco, agisce concretamente sugli oggetti che lo costituiscono.

La corrente del costruttivismo, a cui appartiene lo stesso Piaget, sostiene che il soggetto, implicato nell'attività di apprendimento, dovrebbe avere un ruolo attivo in questa, ovvero che il modo migliore per accedere alle conoscenze è attraverso manipolazioni concrete e il coinvolgimento diretto nell'attività di apprendimento (Corbalán, 1994; Pesci 2007). I giochi, quindi, in seguito a quanto affermato in precedenza, possono essere considerati un'attività adatta allo scopo.

In questo momento il tipo di apprendimento più utilizzato nella scuola è quello che Antinucci, nel suo libro *La scuola si è rotta* (2001), chiama simbolico-ricostruttivo, cioè quell'apprendimento basato sulla spiegazione del libro di testo che deve essere prima letto, decodificato (a questo si riferisce il "simbolico") e poi capito e imparato (a questo invece il "ricostruttivo"): una forma di apprendimento radicalmente opposta a quella che sostiene il costruttivismo, lo studente, in questo caso, ha un ruolo passivo. In linea con l'idea costruttivista è l'apprendimento che l'autore chiama percettivo-motorio. Questo ultimo è descritto come un ciclo continuo di percezione e azione. Dopo aver osservato la realtà (a questo si riferisce il "percettivo"), il soggetto coinvolto, interviene direttamente su di essa (a questo si riferisce il "motorio"). L'azione però produce un cambiamento della realtà e quindi della sua percezione che porta il soggetto ad intervenire nuovamente, e così via, ciclicamente. L'azione porta a una conoscenza, nel soggetto che agisce, che è frutto dell'esperienza. In questo processo di apprendimento, è fondamentale la presenza di un "maestro-guida", questa figura, competente, ha lo scopo di guidare il soggetto nell'apprendimento, se necessario, e di rendere ufficiali le conoscenze apprese dall'esperienza in modo che possano essere fruibili in seguito. La peculiarità di questo processo infatti è che il soggetto coinvolto non è consapevole dell'apprendimento in corso, agisce consciamente ma non si rende conto delle conoscenze che apportano queste azioni. Essendo un apprendimento inconscio non è richiesto all'individuo lo stesso, alto, livello di concentrazione che esige il simbolico-ricostruttivo e la fatica nell'interiorizzare le nuove conoscenze, quindi, è minore.

De Guzmán (1984) e Kiili (2005) sostengono che l'apprendimento percettivo-motorio sia migliore di quello simbolico ricostruttivo. Il primo afferma infatti che l'obiettivo

fondamentale dell'insegnamento, è aiutare gli studenti a sviluppare le loro potenzialità intellettuali, affettive e fisiche in modo armonioso. Aggiunge in seguito che non serve a nulla riempire le menti degli alunni con moltissime informazioni che, nella maggior parte dei casi, verranno apprese a memoria e dimenticate senza poter essere utilizzate in futuro. Lo studente, se stimolato invece in modo attivo e collocato in situazioni che favoriscano l'acquisizione delle abilità basiche necessarie, viene coinvolto direttamente nel processo di apprendimento, migliorando così anche la sua attitudine nei confronti della materia insegnata. Il secondo sostiene, invece, che un apprendimento in cui il soggetto è coinvolto attivamente e in cui sviluppa autonomamente delle nuove idee, o delle nuove conoscenze, è migliore rispetto a uno in cui l'unico compito che ha è memorizzare materiale che altre figure competenti gli hanno presentato.

Le ricerche effettuate negli ultimi anni suggeriscono di integrare i due tipi di apprendimento, ovvero di affiancare alle lezioni frontali delle attività studiate, come possono essere quelle di gioco, che permettano agli studenti di apprendere autonomamente e con un ruolo attivo.

Per comprendere meglio l'apprendimento percettivo-motorio facciamo riferimento alla Teoria delle Situazioni Didattiche di Brousseau (1997). Il sistema didattico descritto da Brousseau è costituito da tre elementi: il sapere, l'alunno e l'insegnante. La relazione tra questi tre elementi può essere rappresentata con uno schema triangolare (Figura 1.2).

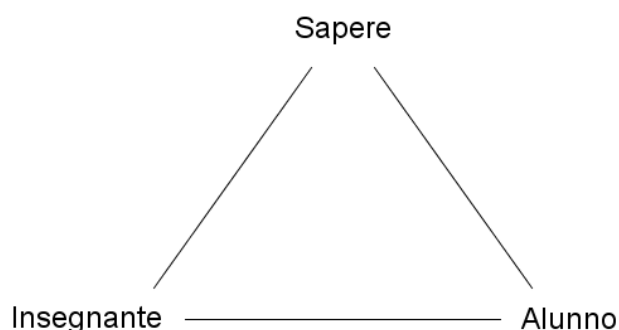


Figura 1.2

La differente relazione che intercorre tra i tre elementi dello schema fa sì che si creino nella situazione di insegnamento tre differenti circostanze:

- La situazione didattica;
- La situazione a-didattica;
- La situazione non didattica.

La situazione didattica è quella condizione, precedente all'insegnamento, in cui c'è uno squilibrio tra le relazioni sapere-alunno e sapere-insegnante: l'alunno ha una relazione con il sapere inadeguata o addirittura inesistente, mentre invece la relazione che sussiste tra quest'ultimo e l'insegnante è opportuna. La conoscenza appartiene all'insegnante che la trasmette all'alunno. Non esistesse questa situazione non avrebbe ragione di esistere l'insegnamento.

La situazione non didattica è la situazione successiva all'insegnamento. L'alunno ha una relazione adeguata con il sapere indipendentemente dalla situazione di insegnamento. L'insegnante ha terminato il suo scopo, l'alunno può risolvere un problema da solo.

La situazione a-didattica è la più interessante ai fini del nostro lavoro. Nel processo di insegnamento l'insegnante deve cercare di creare delle condizioni all'interno del gruppo classe, che favoriscano l'apprendimento. Se riesce a fare in modo che gli studenti costruiscano le proprie conoscenze autonomamente, e non perché richiesto da lui stesso, ha raggiunto l'ideale situazione a-didattica. Per cercare di avvicinarsi sempre di più a questa circostanza l'insegnante deve cercare di togliere tutti gli artifici didattici dalla situazione per lasciare solamente la costruzione personale della conoscenza. Prima fase del processo per arrivare alla situazione ideale è la cosiddetta *devoluzione*, ovvero quando l'insegnante cerca di fare in modo che l'alunno venga coinvolto nel processo di risoluzione del problema proposto indipendentemente dal suo desiderio. L'insegnante consegna l'obiettivo cognitivo all'alunno che si impegna responsabilmente nella risoluzione del problema. Successiva alla devoluzione c'è una fase che possiamo chiamare di *implicazione*. Lo studente accetta di occuparsi della risoluzione del problema senza la guida dell'insegnante. La *situazione d'azione*, segue

l'implicazione. È quella fase in cui lo studente crea una propria conoscenza. In questa fase l'alunno è tenuto a prendere delle decisioni che portano allo sviluppo di strategie di risoluzione. Queste si possono sviluppare intuitivamente, come reazione razionale a alcune situazioni o come frutto della sperimentazione concreta. Lo studente, interagendo con il *milieu*, l'ambiente, ovvero con l'insieme di tutte le persone, gli oggetti e in generale l'insieme di tutto quel che agisce sull'allievo o su cui l'allievo agisce, apprende autonomamente un metodo per risolvere il problema che ha di fronte. Successiva alla situazione di azione è quella di *formulazione*, ovvero quella in cui gli studenti, discutendo tra loro, raggiungono la formulazione di una strategia comune per risolvere il problema. L'insegnante guida la discussione tra gli alunni senza implicarsi nella formazione del sapere. Gli alunni condividono la propria conoscenza personale per crearne una generale. Nella fase successiva, la *situazione di validazione*, la conoscenza frutto del dibattito tra gli alunni viene dimostrata. Anche in questo caso l'insegnante ha un ruolo marginale, guida la conversazione ma non ne entra a far parte. L'ultima fase è la cosiddetta fase di *istituzionalizzazione*. In questa fase l'insegnante riprende il suo posto. Il suo scopo ora è riconoscere la validità delle conclusioni a cui sono giunti gli studenti, mettere a fuoco le conoscenze acquisite. Il compito dell'insegnante è quello di trasformare le conoscenze acquisite nelle fasi precedenti in sapere generale, riutilizzabile in altri contesti e situazioni.

L'apprendimento percettivo-motorio caratterizza la situazione a-didattica. Gli alunni infatti, implicati attivamente e autonomamente nella risoluzione del problema, vengono coinvolti direttamente nel processo di apprendimento. La conoscenza costruita è frutto dell'esperienza diretta.

Abbiamo già osservato in precedenza che il gioco è una forma di apprendimento attivo, nella prospettiva di utilizzare l'attività di gioco come attività didattica nelle lezioni di matematica, sottolineiamo alcune caratteristiche che riteniamo interessanti per l'applicazione dei giochi ai processi di insegnamento.

1. Permettono una costruzione della conoscenza personalizzata

Garris (2002) propone di vedere la fase di gioco come un insieme di cicli ripetuti. Questi sono composti da tre fasi. La prima è una valutazione, da parte dello studente, del contesto in cui si trova: ad esempio, all'inizio, capire le regole del gioco. I comportamenti conseguenti alla valutazione fanno parte della seconda fase: ad esempio la scelta della strategia da seguire per la risoluzione. Infine, nella terza fase, si avrà un riscontro di quello che si è ottenuto: ad esempio se la strategia ha portato alla conclusione oppure no. A questo punto il ciclo ricomincia con una seconda valutazione della nuova situazione creatasi, e conseguentemente nuovi comportamenti e nuovi riscontri. La peculiarità di questo ciclo è che può essere auto stimolante per la risoluzione del gioco stesso. Infatti a seconda che il riscontro sia positivo o negativo, possono crescere o diminuire il rendimento e la prestazione. Sia il riscontro positivo che quello negativo possono fare aumentare la motivazione. Infatti anche un risultato negativo può stimolare il giocatore a cogliere la sfida e a cercare di proseguire nella risoluzione. In particolare, se i riscontri sono chiari, non importa se positivi o negativi, e lo studente è coinvolto profondamente nella risoluzione del gioco questo può scatenare diversi cicli di gioco che porteranno, probabilmente, alla soluzione dello stesso. La costruzione attiva della conoscenza che deriva dall'esperienza, come tutti i tipi di apprendimento, non è sempre lineare. Ognuno di noi elabora i dati e ragiona in modo diverso utilizzando diverse procedure e percorsi. Questi cicli di risoluzione permettono ad ogni individuo di avere un apprendimento "personalizzato", così da poter seguire il proprio percorso nella costruzione della conoscenza.

2. Possono essere utilizzati in occasioni differenti all'interno del processo di insegnamento

Esistono moltissimi giochi al mondo e ci sono altrettanti, se non di più, modi per utilizzarli durante le lezioni. Essendo uno strumento molto versatile, i giochi, possono essere utilizzati in diversi momenti e con diversi scopi all'interno del processo di insegnamento. A seconda del momento, all'interno del processo didattico, in cui

l'insegnante vuole realizzare l'attività, si possono distinguere tre tipologie di giochi (Corbalán, 1994):

- a. Giochi pre-didattici: sono quei giochi che vengono utilizzati per introdurre un concetto o un procedimento, prima ancora che questo venga spiegato nella lezione frontale. Possono essere utilizzati per introdurre conoscenze nuove o anche per introdurre i processi tipici matematici, le strategie di risoluzione.
- b. Giochi co-didattici: sono quei giochi che accompagnano i concetti matematici introdotti nella lezione frontale. Sono utilizzati mentre si spiegano i concetti o i procedimenti e hanno la funzione di rafforzarli e sostenerli.
- c. Giochi post-didattici: sono quei giochi che vengono utilizzati per rafforzare o stabilizzare delle conoscenze e dei procedimenti già conosciuti, già visti anteriormente.

Possiamo fare un'altra grande distinzione, tra quelli utilizzabili nella didattica, a seconda dell'obiettivo dell'attività di gioco (Corbalán, 1994):

- a. I *giochi di conoscenza* sono quelli che hanno un rapporto stretto con alcuni argomenti, alcune tematiche abituali della matematica, sono utilizzati per introdurre nuove conoscenze o per rafforzare quelle già acquisite. Lo scopo di questi giochi è un insegnamento più ricco, attivo, attraente, creativo, un insegnamento partecipativo dei temi di studio e l'acquisizione in modo ludico dei concetti spiegati.
- b. I *giochi di strategia* invece sono quelli che abbiamo preso in considerazione per questo lavoro e quindi analizzeremo più in profondità. Sono giochi, come afferma Prensky (2005), dove si impara a "fare qualcosa", per questo sono molto importanti nell'apprendimento, sono quelli in cui si sviluppano le conoscenze dei procedimenti tipici dei ragionamenti matematici. Infatti, come vedremo nel prossimo paragrafo, la loro struttura di risoluzione, è simile a

quella che si usa in matematica, in particolare nella risoluzione dei problemi (Gómez-Chacón, 1992).

3. Sviluppano delle abilità specifiche utili nella vita reale

Giocare permette di sviluppare delle abilità specifiche, nello studente, che non sono puramente matematiche (Garris, 2002; Prensky, 2005).

1. Abilità base: competenze tecniche e motorie.
2. Abilità cognitive:
 - a. Imparare “come fare qualcosa” (abilità dichiarative): imparare le mosse del gioco, imparare ad avere il controllo di quello che sta succedendo, conoscere i fatti e i dati per realizzare un compito, essere in grado di riconoscere o riprodurre alcune informazioni.
 - b. Imparare “cosa fare in ogni diverso gioco” (abilità procedurali): imparare le regole del gioco e il loro codice, apprendere quando posso ‘rompere’ le regole, imparare come fare un compito, saper dimostrare di saper applicare le conoscenze in un caso specifico.
 - c. Imparare “perché fare qualcosa” (abilità strategiche): imparare la strategia del gioco, come giocare, sapere come applicare i principi appresi in contesti diversi o derivare nuovi principi per una situazione generale o nuova, questa abilità prevede lo sviluppo e l'applicazione di strategie cognitive e la consapevolezza di quando e perché applicarle.
 - d. Imparare “dove sei”: imparare a livello contestuale il mondo del gioco ed i valori che esso rappresenta. Il gioco viene visto come un riflesso della società: quando c'è un eroe del gioco questo rappresenta la persona ‘che voglio essere’, che ha le qualità che ‘voglio avere’; questo eroe è il filtro per interpretare la vita al di fuori del gioco.

- e. Imparare “a valutare le scelte morali di base” (competenze affettive): imparare quando fare qualcosa e se sia giusto o no farlo. Sentimenti di fiducia e auto-efficacia sono capacità che devono essere viste come un apprendimento specifico nel cambiamento degli atteggiamenti del giocatore.

4. *Possono essere utilizzati come attività per favorire il raggiungimento di una situazione a-didattica*

Brousseau (1997) sottolinea cinque definizioni di *gioco*:

1. Un'attività libera, fisica o mentale, generalmente basata su convenzioni o finzione, che, nella mente di chi la svolge, non ha altro scopo che se stessa, nessun altro risultato che il piacere che questa provoca.
2. Il sistema di regole che organizzano l'attività e ne definiscono il successo e il fallimento, il guadagno e la perdita.
3. Qualsiasi cosa sia usata per giocare, gli strumenti del gioco.
4. Il modo in cui ognuno gioca.
5. L'insieme di posizioni nel gioco tra le quali un giocatore può scegliere in un determinato istante.

Successivamente descrive quella che chiama *situazione di gioco*, ovvero la relazione che esiste tra i differenti significati, tramite uno schema riportato nella Figura 1.3.

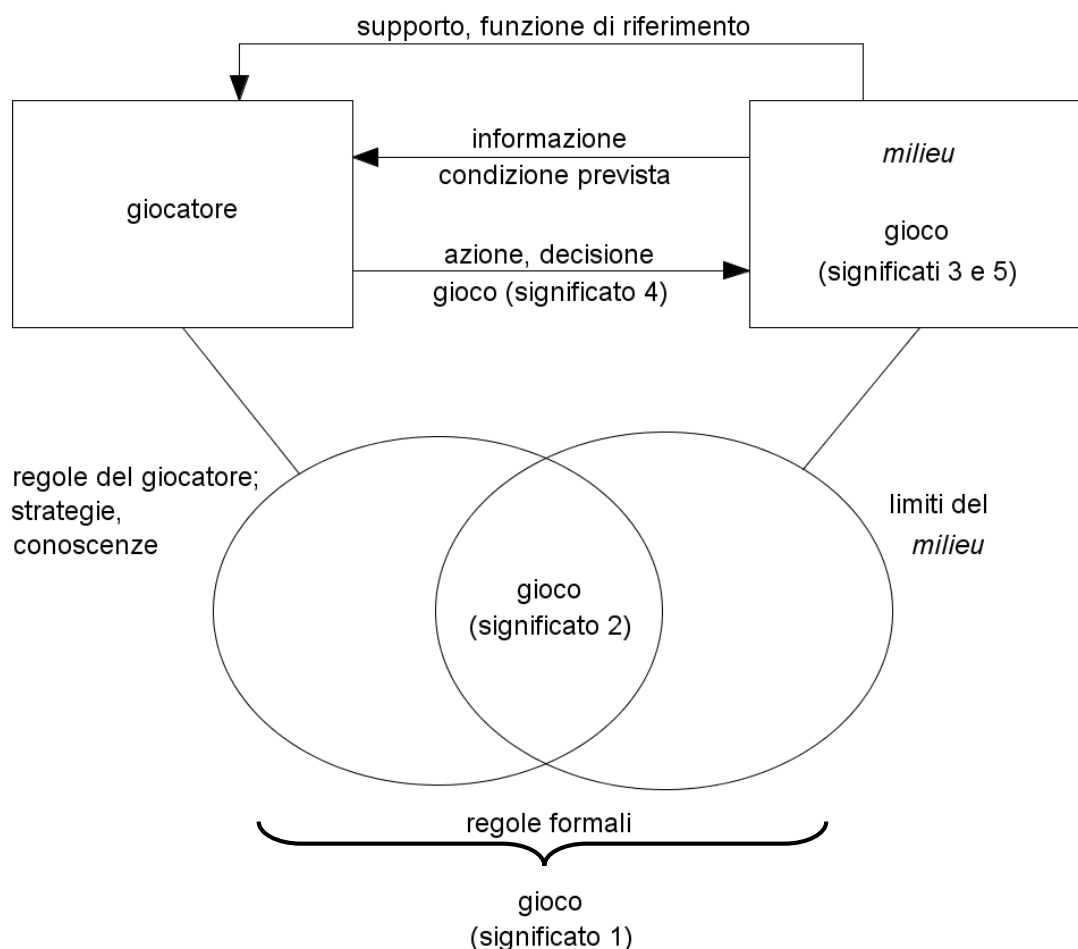


Figura 1.3

Possiamo notare, osservando questo schema, che il giocatore è coinvolto completamente nell'attività. Le uniche interazioni che ha sono con il *milieu*, ovvero con gli oggetti che costituiscono il gioco e con le regole del gioco. L'attività di gioco quindi può essere considerata un'attività adatta per il raggiungimento di una situazione a-didattica. Lo sviluppo delle conoscenze avviene giocando e l'insegnante non ha nessun ruolo attivo in questo apprendimento.

Lo studente, durante lo svolgimento del gioco, non deve avere nessun altro obiettivo se non la risoluzione dell'attività stessa. Lo scopo dell'alunno coinvolto nell'attività è quello di vincere; gioca per il gusto di giocare, per divertirsi. Spetta al docente, che propone il gioco, conoscere esattamente qual è l'utilità di questo all'interno del processo di apprendimento della matematica, quali conoscenze, abilità, capacità vuole

sviluppare. Per lo studente risulterà un apprendimento inconscio, ma sarà una conoscenza che rimarrà viva e indelebile nella sua memoria (Corbalán, 1994).

Garris (2002) afferma che il gioco è un'attività separata dalla vita reale e che nient'altro è importante mentre si gioca. Lo studente è immerso in un mondo dove può sperimentare, vincere o perdere, raggiungere gli obiettivi o fallire, senza che questo abbia una conseguenza nella vita reale; all'interno di questa attività si sentirà libero di provare e anche di sbagliare, non si sentirà giudicato nelle sue azioni. Sembra che una persona più si sente parte di una cultura, più si sente coinvolta, e più cose impara relative a questa, molto spesso non consciamente (Prensky, 2005). Lo stesso avviene con i giochi, più lo studente viene assorbito dal gioco e si estrania dalla realtà e più apprenderà inconsciamente.

Più uno studente è coinvolto nel gioco, più è assorbito all'interno dell'attività, più sarà in grado di raggiungere un'esperienza ottimale. Kiili (2005) descrive l'esperienza ottimale come uno stato psicologico in cui, per lo studente coinvolto nell'attività di raggiungimento della soluzione, l'unica cosa importante è il fine che deve realizzare. L'interesse dell'allievo è tale che il livello di attenzione sale e sono maggiori la coscienza ed il controllo delle abilità personali. Un'alta concentrazione da parte dell'alunno migliora l'uso delle abilità possedute e addirittura, fa sì che il soggetto distorca e perda la concezione del tempo, rimanendo coinvolto attivamente nell'attività per un maggiore periodo rispetto a quanto lo sarebbe in una lezione frontale.

Ma per permettere allo studente di rimanere coinvolto nell'attività, è importante che il livello di questa sia adeguato al giocatore. Per condurre a qualcosa di produttivo bisogna cercare di scegliere il gioco in modo da evitare sia la noia, prodotta da attività con un livello troppo basso, sia l'ansia dovuta invece ad attività con un livello troppo alto rispetto a quello dello studente. Il grado della sfida proposta, pertanto, deve essere vicino a quello delle abilità personali del soggetto. In particolare se il livello è di poco superiore alle sue attuali conoscenze ma, comunque, il gioco è abbastanza

semplice da risultargli comprensibile, si troverà nella situazione in cui, colmando questa distanza, potrà accrescere il livello delle sue abilità. (Garris, 2002; Kiili, 2005)

5. Sono motivanti

Il processo di apprendimento richiede uno sforzo da parte degli studenti ed è, raramente, auto motivante. Il gioco, al contrario, è coinvolgente e divertente e quindi intrinsecamente stimolante. (Prensky, 2005) Apprendere allora durante l'attività di gioco sembra la strada migliore.

Giocare è essenzialmente una attività divertente, ma non significa che non sia seria. L'uso consapevole dei giochi, ovvero il loro utilizzo come strumento di apprendimento, è utile quanto una lezione frontale, ritenuta dai più, la vera attività seria. Proposte interessanti e esperienze felici, cosiddette attività ricreative, migliorano l'atteggiamento degli studenti nei confronti della materia e di conseguenza il loro apprendimento (Corbalán, 1994).

All'inizio dell'attività di gioco ogni studente ha dei pregiudizi riguardanti il gioco stesso: quanto può essere divertente, interessante, emozionante, coinvolgente. La maggior parte di questi sono accompagnati da sentimenti positivi che traggono origine dall'aspettativa, a priori, di divertimento e rilassamento che il gioco comporta. Queste opinioni determinano la direzione, l'intensità e la qualità dei comportamenti successivi. Uno studente motivato si butta con entusiasmo nella pratica e nella risoluzione del gioco; lo fa con intenzione, vigore ed è molto più persistente, tenace e spronato a continuare quando incontra delle difficoltà rispetto a uno poco stimolato. Lo studente incentivato sarà più interessato e più coinvolto nel compito a cui dedicherà, attivamente, molto tempo ed energie e assimilerà le conoscenze meglio di uno annoiato e disinteressato. (Corbalán, 1994; Garris, 2002)

La matematica, in genere, obbliga gli alunni a lavorare molto con esercizi pratici per lo più ripetitivi. Il gioco è uno strumento che può essere utilizzato sostituendoli o affiancandoli, rompendone così la routine e dando agli studenti un maggiore stimolo a

continuare nella pratica. È importante trovare qualche cosa che risvegli il senso matematico in molti studenti sopito, perché si corre il rischio, altrimenti, di tagliare tutte le possibilità di sviluppo seguenti. I giochi possono essere una buona attività per raggiungere lo scopo. Una situazione attraente può dar luogo a una relazione con la materia durevole e gioiosa. (Gómez-Chacón, 1992; Corbalán, 1994)

De Guzmán nel suo articolo del 1984 scrive:

“... è un fatto frequente che molte persone che si dichiarano incapaci per tutta la vita di fare matematica, si divertano intensamente con puzzle e giochi, la cui struttura si allontana poco da quella matematica. Esistono in queste persone chiari blocchi psicologici che annebbiano le loro menti nel momento in cui si rendono conto che, la questione che gli si sta proponendo, a volte molto più facile rispetto al gioco che solitamente praticano, ha a che vedere con il teorema di Pitagora”.

Risalta da queste parole il fatto che affrontare lo studio dei procedimenti matematici con i giochi, può essere un buon metodo per eliminare o limitare la formazione dei suddetti blocchi e contribuire alla creazione, negli studenti, di un'attitudine più positiva nei confronti della materia.

6. Sono versatili

Caratteristica di tutti i giochi è avere delle regole obbligatorie che devono essere soddisfatte. Queste regole, anche se poche, sono precise e governano la dinamica del gioco che si svolge in un tempo e in uno spazio fissati, le regole della vita di tutti i giorni sono sospese per la durata dell'attività e vengono utilizzate al posto le nuove regole del gioco (Garris, 2002). Corbalán (1994) sostiene che, in generale, un gioco è più attraente quante meno regole ha e quanto più chiare siano queste. Se è abbordabile infatti si può iniziare l'attività con facilità, senza dover spendere un sacco di tempo e energie memorizzando norme.

Le regole del gioco si possono modificare, spetta al docente però il compito di farlo prima dell'inizio dell'attività. Cambiandole è possibile semplificare il gioco, renderlo più

difficile, o raggiungere scopi diversi a seconda del tipo e livello di attività che si vuole proporre; usando lo stesso piano di gioco è possibile giocare in modo diverso raggiungendo obiettivi scolastici differenti.

Dopo aver chiarito cos'è un gioco e le sue caratteristiche principali, specifichiamo quali sono i requisiti che ne fanno un "buon gioco" (Corbalán, 1994; Garris; 2002; Kiili, 2005; Shute, 2011).

1. La struttura del gioco deve essere tale che il suo livello di difficoltà sia vicino ai limiti delle capacità del giocatore, per essere stimolante quindi non deve essere né troppo facile né troppo difficile.
2. Avere poche regole facili da capire. Se le norme sono lunghe e prolisse e necessitano di un lungo tempo per poter essere capite, lo studente non è invogliato nell'iniziare a giocare. Questo non vuole dire che il gioco sia, necessariamente, di facile risoluzione.
3. Un buon gioco deve durare poco tempo. Il modo di dire di origine proverbiale: *un bel gioco dura poco*, ci ricorda che "una cosa piacevole che, tuttavia non fa parte della concreta realtà della vita, non può e non deve durare molto, altrimenti perde la sua bellezza" (*Dizionario on-line dei Modi di Dire del Corriere della Sera*). Se una partita è troppo lunga, tende a diventare poco interessante e poco divertente lasciando il posto alla noia.
4. Deve avere un obiettivo o un qualcosa di sconosciuto che stimoli la curiosità e che motivi il giocatore generando lo sviluppo di nuove conoscenze.

Vedremo nel prossimo paragrafo che la struttura intrinseca dei giochi, in particolare di quelli di strategia, ricalca le fasi di risoluzione di un problema matematico. Non solamente il gioco può essere utilizzato come stimolo e motivazione per gli studenti ma anche come strumento metodologico di apprendimento per la risoluzione dei problemi (Gómez-Chacón, 1992).

1.2. L'UTILIZZO DEI GIOCHI DI STRATEGIA NELLA DIDATTICA

1.2.1. Giochi di strategia e...

Tra tutti i giochi possibili ed utilizzabili all'interno delle lezioni di matematica i più interessanti sono i giochi di strategia poiché sviluppano strategie e procedimenti tipici relativi al pensiero matematico. Elenchiamo ora le loro caratteristiche fondamentali. (Rielaborazione da Corbalán (1994) e Gómez-Chacón (1992)).

- Possono essere dei solitari (per una persona) o per due o più persone. I solitari vengono considerati giochi di strategia anche se l'avversario da battere non è una persona fisica ma sono le regole stesse del gioco.
- Hanno, come tutti i giochi in generale, un insieme fisso di regole che stabiliscono gli obiettivi per tutti i giocatori coinvolti, affermando in modo chiaro quando vince il gioco una delle parti.
- I giocatori durante la risoluzione devono scegliere il proprio percorso cioè le azioni per il raggiungimento degli obiettivi del gioco, ovvero devono riuscire a mettere a punto procedure, tattiche o strategie per vincere o per lo meno per non perdere. La scelta dei movimenti viene fatta in modo intelligente, sulla base di tutte le informazioni di cui si dispone al momento e di tutte le conoscenze o abilità che ognuno ha nel proprio bagaglio.
- Il fine è vincere o almeno cercare di fermare l'avversario in modo che egli non riesca a raggiungere l'obiettivo per primo.

Obiettivo di questo tipo di giochi è la ricerca di una strategia vincente, di un procedimento sicuro per prevalere, dove la fortuna ha un ruolo minimo o addirittura è del tutto assente nel processo.

Ma cosa significa strategia? La parola *strategia* deriva dal vocabolario militare degli antichi greci ed è penetrata nel linguaggio matematico ed economico. Diamo ora due

definizioni di “strategia” che riteniamo significative e che, come quelle esposte in precedenza, troviamo nel *Dizionario Treccani*:

1. “La tecnica di individuare gli obiettivi generali di qualsiasi settore di attività pubbliche e private, nonché i modi e i mezzi più opportuni per raggiungerli: scelta dei mezzi ritenuti più adatti a raggiungere gli obiettivi fissati dal *gioco*. Nell’uso corrente, modo di agire, di procedere e similari, accortamente diretto al raggiungimento di un fine.”
2. “Nella teoria dei giochi e in applicazioni statistiche, regola generale di condotta che, prevedendo i possibili sviluppi di certe situazioni (per esempio, le successive mosse dell’avversario), stabilisce quali linee di azione si debbano seguire per il conseguimento dell’obiettivo.”

Nel *Dizionario di Matematica* (Bouvier-George, 1984) troviamo queste altre due definizioni che riporta Corbalán nel suo lavoro:

3. “Strategia di un giocatore: descrizione completa di come il giocatore dovrebbe comportarsi in ogni circostanza possibile, in ogni giocata. In un gioco finito, se si conoscono le strategie dei giocatori, è possibile conoscere lo sviluppo e l’esito del gioco.”
4. “Strategia vincente: nella teoria dei giochi, si dice di una strategia che porta il giocatore ad un successo qualunque cosa facciano gli avversari.”

La strategia è quindi il modo che sceglie un giocatore per cercare di raggiungere l’obiettivo del gioco, e le abilità di cui dispone sono fondamentali per riuscire nell’intento. Quasi in nessun gioco esiste un’unica strategia, un unico percorso possibile, ma si può ottenere, con l’analisi dettagliata di tutte quelle possibili, la strategia chiamata “vincente”, che porta alla vittoria indipendentemente da ciò che viene fatto dagli avversari.

1.2.2. ...problemi matematici

Il nucleo fondamentale della matematica è la risoluzione dei problemi. È stato chiamato con ragione il cuore della matematica perché è proprio da questo che vengono attratti e continuano ad essere affascinati i matematici di tutte le epoche (Miguel De Guzmán in Corbalán (1994)).

Ma che cos'è un problema? Il termine deriva dal greco e significa "mettere avanti, proporre". Anche in questo caso ci serviamo del dizionario *Treccani* per trovare una definizione:

"Ogni quesito di cui si richieda ad altri o a sé stessi la soluzione da raggiungere, seguendo un procedimento di natura assai varia, partendo di solito da elementi noti."

Risaltano tre elementi fondamentali in questa definizione:

- Il quesito contenente i dati noti;
- La soluzione;
- Il percorso per raggiungerla.

Il quesito di un problema, di solito, è una certa storia da raccontare, è un enunciato che è un ponte tra la matematica, prettamente numerica, e la vita reale. Il cammino per arrivare alla soluzione non è evidente, non è univoco, non è codificato, non è insegnato da qualcuno. Per riuscire a risolvere un problema bisogna appellarsi alle proprie conoscenze e abilità; anche a quelle che con il tempo sono andate disperse nei meandri della memoria. Sovente richiede addirittura l'integrazione di conoscenze derivanti da campi diversi; a un problema non si può rispondere per applicazione diretta di nessun risultato matematico conosciuto anteriormente. Non solamente i percorsi per risolverlo possono essere molteplici ma non è detto che esista un'unica soluzione (Corbalán, 1994 e 1997; Kiili, 2005).

Possiamo dunque, dividere i problemi in due categorie: quelli *ben strutturati*, che hanno una risposta definitiva e quelli *non strutturati*, che normalmente si incontrano

nella vita reale, che non hanno una soluzione precisa e sovente contengono anche informazioni incomplete. Per questi ultimi, esisterà una soluzione “migliore” che dipenderà dalle priorità della situazione (Kiili, 2005).

Nella risoluzione del problema, non essendo unica, si possono usare differenti tipi di strategie.

“Sulla strada per una strategia vincente giocano un importante ruolo le idee che producono o che forniscono riflessioni appropriate, che conducono verso il raggiungimento di un qualche tipo di strategia”. Così afferma Corbalán (1997) e distingue queste idee in *idee chiave* e *idee favorevoli*.

Idee chiave: sono quelle che portano a una strategia vincente totale o a una strategia parziale (che è quella che porta alla vittoria iniziando da una posizione particolare).

Idee favorevoli: sono quelle che facilitano l'analisi del gioco e permettono, a volte, di arrivare ad una strategia.

Vediamo ora i diversi tipi di strategie che si possono sviluppare nella risoluzione dei problemi (rielaborazione del lavoro di Corbalán (1994 e 1997)).

- *Tentativi ed errori*

Consiste nel provare un'alternativa e vedere se funziona; se funziona si ottiene una soluzione, se non funziona si prova in un altro modo. È un modo molto comune di procedere, il problema è che porta ad una soluzione ma, non è certo se questa è l'unica o la migliore.

- *Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice*

Consiste nel cercare di risolvere un problema più semplice che conduce ad una soluzione che serva per trovare la soluzione del problema originale. Si usa quando si ha di fronte un problema che va oltre le proprie capacità per la sua complessità e in un caso più semplice è possibile trovare modelli o regolarità che in seguito si possono generalizzare.

- *Manipolare e sperimentare manualmente*

Consiste nel manipolare oggetti per raggiungere una soluzione. Si tratta di una strategia utilizzata nei problemi in cui è necessario costruire qualcosa (come per esempio il noto gioco del 'Tangram'), o nei casi in cui costruire qualcosa o manipolare degli oggetti serve per raggiungere una soluzione, sviluppa le abilità spaziali.

- *Scomporre il problema in problemi più piccoli, semplificare*

Consiste nel decomporre il problema che è troppo complesso da risolvere in alcuni più piccoli e più facili da risolvere, che insieme portano alla soluzione del problema iniziale.

- *Sperimentare e estrarre modelli (o regolarità), praticare l'induzione*

Consiste nel cominciare da casi particolari e cercare di trovare una regola comune che permetta di arrivare a una generalizzazione del procedimento, questa generalizzazione sarà quindi applicabile generalmente a tutti i casi. Normalmente questa strategia porta ad una formulazione generale del problema attraverso una formula in una variabile.

- *Risolvere problemi simili, analogie*

Consiste nella ricerca di un problema simile a quello di partenza, già conosciuto o di cui comunque si conosce la risoluzione, e nel cercare di risolvere il problema proposto in modo simile o come il problema già noto. Ci sono casi di giochi che non sono solo simili ma sono esattamente gli stessi, solamente con nomi differenti, che possono essere utilizzati per sviluppare la pratica di esplorazione precedente nella quale si ricercano problemi simili già conosciuti.

- *Seguire un metodo, organizzarsi*

Un'organizzazione adeguata nella risoluzione del problema è importante per proseguire fluidamente nel ragionamento e, se necessario, per poter

revisare il lavoro fatto senza avere difficoltà a trovare sviluppi specifici della risoluzione.

- *Fare schemi, tabelle, disegni, rappresentazioni grafiche*

Consiste nel disegnare qualcosa che possa aiutare nel ragionamento, o addirittura qualcosa che possa portare a trovare la soluzione del problema proposto.

- *Fare uno studio sistematico di tutti i casi*

Consiste in un procedimento di ricerca che tenta di minimizzare i tempi di analisi e di evitare ripetizioni di casi già analizzati. Con questa strategia si evita di dimenticare situazioni che possono essere quelle che realmente interessano, che permettono di trovare la soluzione. Viene utilizzata per testare tutte le possibilità.

- *Utilizzare un metodo appropriato di espressione: verbale, algebrico, grafico, numerico*

Si tratta di una strategia particolarmente importante. Trovare un buon modo per esprimere le procedure e i risultati che si trovano nella risoluzione del problema, spiegare in modo chiaro ciò che si sta facendo, permette di riprodurre le procedure, evitare di fare le stesse cose più volte e successivamente spiegare chiaramente le strategie utilizzate e le soluzioni trovate. Può anche essere utile per indurre le strategie vincenti.

- *Approfittare della simmetria*

Utilizzare la simmetria consente l'introduzione del ragionamento geometrico (o visivo) nei processi di analisi dei problemi, anche non necessariamente in contesti prettamente geometrici, e consente la globalizzazione dei processi di pensiero, contribuendo a mettere insieme i procedimenti aritmetici e geometrici.

- *Dedurre e trarre conclusioni*

Consiste nel giungere a conclusioni come conseguenza di conoscenze precedenti, è una sequenza finita di ragionamenti, una concatenazione di conseguenze logiche, che portano alla soluzione del problema.

- *Fare congetture*

Consiste nel trarre conclusioni dai dati incerti, se possibile; risolvendo problemi è importante fare delle ipotesi su una soluzione.

- *Principio dei cassetti*

Consiste nel fatto che se si hanno m oggetti in n cassetti ($m > n$), allora almeno un cassetto dovrà contenere più di un oggetto. Può essere usato per dimostrare risultati inaspettati, come "Almeno due persone a Roma hanno lo stesso numero di capelli"

- *Analizzare casi limite*

Consiste nell'analizzare i casi limite di un problema e dalla valutazione di tali casi particolari trarre delle conclusioni generali per arrivare alla soluzione del problema.

- *Riformulare il problema*

Consiste nel riformulare il problema iniziale con dati più semplici o semplicemente in maniera che risulti più facile da risolvere.

- *Supporre "che no" (Riduzione all'assurdo)*

Consiste nel negare un'affermazione e seguendo il ragionamento arrivare a una conseguenza che risulti assurda rispetto alle ipotesi del problema. Questo procedimento porta come conseguenza la validità dell'affermazione in questione.

- *Partire dalla fine, supporre il problema risolto (uso del ragionamento regressivo)*

Praticare il ragionamento regressivo consiste nel fare un certo numero di ragionamenti in ordine inverso che permettono di ottenere la soluzione del problema. Si parte dalla fine del problema, dalla soluzione, e si risale fino all'inizio, in una serie di ragionamenti che portano a trovare la soluzione desiderata.

Tutte queste strategie possono essere considerate idee chiave o idee favorevoli a seconda di come vengono utilizzate all'interno della risoluzione, è molto chiaro che alcune di queste come può essere *Seguire un metodo, organizzarsi* possono essere considerate più delle strategie di "aiuto" per l'avanzamento della risoluzione che delle strategie di "attacco", ovvero di vero e proprio avanzamento verso la soluzione, aiutano comunque nel raggiungimento dell'obiettivo.

Lo scopo della risoluzione dei problemi all'interno di una lezione di matematica è quello di scoprire nuove regole, nuove idee autonomamente. L'apprendimento caratteristico della risoluzione dei problemi è quello che in precedenza abbiamo chiamato percettivo-motorio, in cui lo studente ha un ruolo attivo; questo tipo di attività favorisce il raggiungimento della situazione a-didattica. L'alunno infatti sviluppa autonomamente le strategie durante la risoluzione. I problemi non strutturati, che non sono lineari, richiedono l'utilizzo di dati, nozioni, conoscenze e abilità che provengono da vari ambiti. Risolvere il problema richiede quindi, non solo che lo studente abbia un ruolo attivo ma che questo sia anche interattivo, ovvero che l'alunno cerchi le risorse per riuscire a risolvere il quesito tra tutte le conoscenze che ha acquisito in ambito matematico e non.

Nella nostra società, vi è l'opinione diffusa che l'unico modo possibile di risolvere problemi sia quello di avere "idee luminose" che si possiedono oppure no. È evidente che ci sono persone che hanno più capacità di altre nel risolvere i problemi, anche se

hanno la stessa età e formazione. Sono quelle che applicano, a volte inconsciamente, una serie di metodi e meccanismi che sono soliti della risoluzione dei problemi: i processi euristici, ovvero le operazioni mentali tipicamente utilizzate per la loro risoluzione. La conoscenza e la pratica di questi è l'oggetto della risoluzione di problemi. È necessario conoscerne i processi per essere in grado di applicarli ai diversi casi, questa è una facoltà allenabile. Così facendo, si può raggiungere la dimestichezza necessaria per riuscire a risolvere positivamente quasi tutti i problemi, matematici e non. Studiare i loro processi di risoluzione teoricamente non serve, l'unica maniera di apprendere è risolverli. (Corbalán, 1994)

Diamo ora le caratteristiche che fanno di un problema un buon problema:

1. Non sono quesiti con trappole o indovinelli, non contengono giochi di parole con sensi multipli.
2. Possono o no avere applicazioni ma, l'interesse della risoluzione è in loro stessi, nel loro processo.
3. Rappresentano una sfida alle qualità desiderabili di un matematico.
4. Una volta risolti si ha voglia di proporli ad altri.
5. A prima vista sembrano abordabili, semplici; non lasciano, colui che sta risolvendo, bloccato, senza capacità di reazione.
6. Producono, risolvendoli, un tipo di piacere difficile da spiegare ma gradevole da sperimentare.

Il contesto in cui vengono proposti i problemi, ha una grande importanza per l'esito positivo o negativo della risoluzione e questo incide fortemente sulle attitudini nei confronti della materia.

All'interno della definizione di "problema" nel dizionario Treccani troviamo questo approfondimento sull'insegnamento per problemi:

"Insegnamento della matematica per problemi: metodo didattico nel quale si privilegia un approccio ai vari argomenti attraverso problemi (tratti dalla realtà, o anche interni alla matematica) rispetto a una trattazione teorica più tradizionale."

Questo è quello che Prensky (2005) chiama "apprendimento goal-oriented". L'uso di questa tecnica di apprendimento genera una conoscenza attraverso il raggiungimento di una meta per mezzo di tattiche e strategie. Un gioco di strategia è considerato goal-oriented e quindi focalizzato sulla risoluzione dei problemi.

Il vero parametro dell'apprendimento è il cambiamento dei comportamenti di chi ha appreso, anche se questo non può essere riconosciuto, e quindi valutato, nell'immediato ma è evidente a lungo termine. Quello che dovremmo proporre maggiormente agli alunni, è la possibilità di abituarsi ai ragionamenti tipici della risoluzione dei problemi, matematici o no, perché questo è ciò che servirà loro nella vita. (Shute, 2011)

1.2.3. Euristiche: giochi di strategia e risoluzione di problemi

L'attività di gioco propone delle situazioni in cui la ricerca che si adotta per trovare la soluzione è molto simile a quella che si usa trattando argomenti matematici. In particolare c'è una forte analogia tra il disegno e la realizzazione dei giochi di strategia e l'attività più importante della matematica, ovvero la risoluzione di problemi (Corbalán, 1994 e 1997; Gómez-Chacón, 1988, 1990, 1992). Cercando di decidere quale è il miglior modo di giocare, lo studente si sforza di realizzare un ragionamento, che è di tipo logico, e di pensare in maniera matematica.

Il disegno dei giochi più riusciti e più interessanti, che coinvolgono maggiormente, è molto vicino alla modellizzazione o alla simulazione. Basti pensare al gioco degli scacchi che ricrea una battaglia tra due eserciti o al backgammon che riproduce giorni,

settimane e mesi. Questi giochi sono particolarmente attraenti perché sono modelli di situazioni reali e coinvolgenti.

Vediamo le somiglianze della struttura euristica della risoluzione dei problemi e di quella dei giochi di strategia. In un primo avvicinamento possiamo notare che il disegno e la risoluzione del gioco hanno delle caratteristiche che ricalcano il modello assiomatico euclideo. Infatti quest'ultimo parte dal presupposto che vi siano un piccolo numero di risultati auto evidenti (assiomi e postulati) e una serie di leggi fisse ed esplicite, ad iniziare dalle quali, si formula tutto il corpo dottrinale. Analogamente, un gioco è composto da una prima sezione in cui c'è la descrizione delle condizioni iniziali e alcune regole fisse, che sono i movimenti possibili, a partire dalle quali si sviluppa la sequenza di fasi che porta alla soluzione. In particolare, i movimenti che si realizzano si possono far corrispondere ai distinti passi della deduzione, le strategie parziali alle applicazioni parziali in matematica e il raggiungimento delle strategie generali del gioco possono equivalere a nuovi teoremi o risultati. Vincere una partita o affrontare in modo soddisfacente un gioco può essere quindi equivalente alla risoluzione di un problema in matematica. (Corbalán, 1994)

Proprio sulla risoluzione dei problemi si concentra la similitudine con i giochi, in particolare con quelli di strategia. Entrambi, risoluzione di problemi e di giochi, attivano processi mentali come la lettura e l'interpretazione di dati, la rappresentazione, la sistematizzazione, la formulazione di congetture, la selezione di strategie di risoluzione e la verifica dell'efficacia delle strategie. Osservando la risoluzione di un gioco di strategia si può notare che le strategie che vengono sviluppate sono le stesse che vengono sviluppate nella risoluzione dei problemi. Inoltre le due risoluzioni coincidono euristicamente, cioè coincidono a livello di processi di pensiero attivati per la loro soluzione. Proprio per questo molte abilità tipiche matematiche si possono acquisire attraverso il gioco. (Gómez-Chacón, 1992)

Polya, nel suo lavoro *How to solve it?* del (1945) specifica le quattro tappe fondamentali per la risoluzione dei problemi:

1. Comprendere il problema.
2. Tracciare un piano per risolverlo.
3. Mettere in pratica il piano.
4. Provare i risultati.

La prima fase è importantissima soprattutto quando la formulazione del quesito non è strettamente matematica; è la fase di studio del problema in cui si riflette e si cercano i nessi tra le conoscenze preve che possono aiutare nella risoluzione. La seconda e la terza fase possono essere ripetute più volte in quanto, come sostiene Garris (2002) il pensiero, la risoluzione e l'acquisizione di conoscenze non sono lineari e non avvengono nello stesso modo per tutti. Nella risoluzione dei problemi ci sono continui cambiamenti tra il disegno del piano di risoluzione con le strategie da usare e la messa in pratica dello stesso. L'ultima fase è il confronto dei risultati ottenuti con il contesto di risoluzione, il parallelo con la realtà permette di valutare i risultati ottenuti e verificare che siano corretti.

Anche nella risoluzione dei giochi di strategia, in particolare nel processo di ricerca delle strategie vincenti, troviamo una sequenza di quattro fasi, che possiamo schematizzare così (De Guzmán (1994); Gómez-Chacón (1992)):

1. Familiarizzazione con il gioco: prima di fare, cercare di capire
2. Esplorazione iniziale: ricerca e disegno di strategie
3. Esecuzione della strategia: valutare se la strategia porta alla conclusione
4. Riflessione sul percorso seguito: generalizzazione della strategia sviluppata

Anche in questo caso, la prima fase è la più importante. Capire bene le componenti e le regole del gioco è fondamentale per il raggiungimento della soluzione. Molti iniziano a giocare senza cercare di capire come funzionano le diverse parti del gioco, come si muovono le pedine, com'è strutturato il tavolo da gioco e quali sono le regole, perdendosi informazioni che possono tornare utili per l'analisi e lo sviluppo delle strategie. In questa prima fase, dopo uno studio attento delle componenti, lo studente gioca per familiarizzare con il gioco, spesso facendo delle figure o dei disegni per aiutarsi nei ragionamenti.

La seconda fase, che riguarda la ricerca di strategie possibili, è quella in cui lo studente gioca per interiorizzare i movimenti mentre prova, attraverso l'uso delle conoscenze precedenti, a relazionare il gioco stesso con uno conosciuto o con uno simile, o tenta di trovare, tra i metodi vincenti che conosce, quale può essere applicato in quel caso specifico. Cercando le connessioni con elementi già conosciuti in precedenza a volte non si trova qualcosa di analogo da associare al gioco in questione. Non sempre è facile riuscire a trovare una strategia. Non riuscendo a trovarla è quindi utile costruire un gioco ausiliare più semplice, che si possa risolvere più facilmente. Fare degli schemi, colorare, disegnare, può aiutare a trovare strade diverse per la risoluzione.

La terza fase consiste nell'esecuzione vera e propria della strategia studiata in precedenza. Si mettono in pratica i piani progettati e si studiano i movimenti per vedere se il sistema scelto riesce a portare fino alla fine del gioco oppure no. Applicando la tattica e selezionando le posizioni vincenti si può esaminare la validità delle congetture. Importante in questa fase è non arrendersi e portare avanti il metodo scelto con decisione, mettere in pratica le idee con un ordine, non a caso, per ricordarsele meglio e non ostinarsi su una sola strategia di risoluzione. Non è detto che la prima strategia incontrata nella fase antecedente sia necessariamente quella che porta alla soluzione; anzi, la maggior parte delle volte non è così. Come per la risoluzione dei problemi anche qui la seconda e la terza fase possono essere ripetute diverse volte all'interno della risoluzione. Se non funziona una tecnica scelta si ritorna alla seconda fase e si prova un'altra strada. Si pensa una nuova strategia e, successivamente, la si mette nuovamente in pratica. Spesso il cambio di piano avviene

in corso d'opera, ovvero a metà dell'uso di un dato metodo lo studente si rende conto che questo non lo conduce da nessuna parte e quindi lo modifica, oppure si rende conto che sarebbe meglio usare una tattica diversa perché più semplice o di risoluzione più chiara e quindi la cambia a metà della risoluzione. È utile provare la strategia immaginata anche se questa non porta alla conclusione, perché spesso l'idea di un nuovo metodo nasce mettendo in pratica il precedente.

L'ultima fase infine, successiva alla risoluzione del gioco, è una riflessione sul lavoro svolto. Guardando a fondo il lavoro di risoluzione lo studente cerca di assimilare l'esperienza sforzandosi di capire la ragione che lo ha spinto a usare proprio quella determinata tecnica, se questa è generale o ce ne sono altre che possono portare alla risoluzione. Riflettendo sul percorso seguito si possono cercare giochi analoghi o che utilizzino lo stesso procedimento di risoluzione, cercando di capire se ci si può avvalere della strategia utilizzata anche per questi giochi. Questa è la parte più importante nel processo di matematizzazione. Le riflessioni sui processi seguiti e sulle metodologie utilizzate, permettono ai processi mentali esplicitati di essere utilizzati in esperienze future, in altri giochi o in contesti differenti.

L'analogia tra i due processi di risoluzione risulta essere molto chiara. Questa analogia è stata identificata da Gómez-Chacón nel suo lavoro del 1992. La professoressa riassume in una tabella (Tabella 1.1) i due processi euristici e sottolinea l'analogia tra questi.

EURISTICA		
<i>Risoluzione dei problemi</i>		<i>Risoluzione dei giochi di strategia</i>
<ul style="list-style-type: none"> - Comprendere cosa chiede il problema - Comprendere cosa bisogna trovare - Comprendere che dati ho 	1. LEGGERE IL PROBLEMA O LE REGOLE DEL GIOCO	<ul style="list-style-type: none"> - Comprendere i requisiti - Comprendere i movimenti - Comprendere come vincere
<ul style="list-style-type: none"> - Esiste un problema analogo di cui conosco la soluzione? - Formulare tutte le congetture - Selezionare alcune strategie 	2. ESPLORARE	<ul style="list-style-type: none"> - Ho giocato a qualche gioco simile? - Selezionare le possibili strategie
<ul style="list-style-type: none"> - Esaminare la validità di ogni congettura 	3. ESEGUIRE LA STRATEGIA	<ul style="list-style-type: none"> - Che movimenti di attacco o di difesa fanno sì che il gioco progredisca?
<ul style="list-style-type: none"> - Se ho risolto il problema, perché si tratta di una strategia generale? - Posso usare questa strategia per altri problemi? 	4. VERIFICARE I RISULTATI	<ul style="list-style-type: none"> - Se la strategia selezionata è sempre vincente, è una strategia generale? - Funziona questa strategia con altri giochi o altri avversari?

Tabella 1.1

L'utilità dei giochi di strategia in matematica a questo punto è chiara anche se spesso non è evidente nell'immediato. L'analogia tra i due processi euristici fa sì che i giochi siano uno strumento utile per sviluppare le abilità specifiche per risolvere i problemi e i procedimenti tipici del pensiero matematico. Possono influenzare fortemente la formazione del pensiero matematico degli studenti, sviluppando un atteggiamento per affrontare e tentare di risolvere i problemi che rimane nel tempo e si può applicare non solo in contesto matematico, ma, in generale, a tutte le situazioni della vita reale.

La conoscenza che si produce, sovente inconsciamente, rimane viva nell'inconscio del giocatore e, grazie al fatto che è stata maturata in modo personale e obiettivo durante l'attività di gioco, si attiva quando si incontra una situazione simile a quella vissuta nel gioco anche se in un contesto diverso. (Corbalán, 1994 e 1997)

Quello che vogliamo fare, in questa sperimentazione, è esplorare i processi euristici che si sviluppano sia nei problemi che nei giochi. In particolare ci vogliamo concentrare su una delle strategie elencate in precedenza, quella del ragionamento regressivo. Vogliamo dimostrare che, utilizzando un gioco, sarà più facile capire che: il ragionamento regressivo, consiste nel fare una serie di movimenti in ordine inverso che permettono di ottenere il risultato e che questo, molte volte, riduce la complessità del problema iniziale.

Pensiamo un momento alla storia, utilizzando le regole matematiche si poterono trovare le leggi che, ancora oggi, regolano il gioco d'azzardo. Coloro che iniziarono a studiarlo non lo fecero per altruismo ma per avere una maggiore possibilità di vincere, giocando in maniera vantaggiosa. Possiamo così capire che, se si medita su un gioco, se si arrivano a scoprire le strategie vincenti, o se si arrivano a capire i meccanismi intrinseci di un gioco, si può avere un vantaggio. Dobbiamo cercare di infondere nei nostri studenti la voglia di riflettere sulle strategie del gioco per cercare di trovare le leggi o le situazioni che permettano loro di vincere più spesso rispetto a quando giocano solo attraverso le intuizioni. (De Guzmán, 1984)

1.3. PANORAMICA DEI GIOCHI NELLA STORIA DELLA MATEMATICA

Per la stesura di questa panoramica storica dei giochi legati alla storia della matematica faremo riferimento all'articolo di De Guzmán (1984) e a quello di Shaaf (2015).

Anche se dobbiamo aspettare fino al 1612, quando *Claude-Gaspar Bachet de Méziriac* pubblicò la sua opera *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, per avere, per la prima volta, una sistematizzazione, formalizzazione e analisi

matemática de los juegos escrita, ya tenemos pruebas de su uso en la matemática a lo largo de la historia a partir de la época egipcia.

De hecho, se han encontrado relieves del antiguo Egipto donde se ven figuras que juegan, juegos de mesa en antiguas tumbas y algunos papiros con problemas matemáticos en forma de acertijos. Un ejemplo es el *Papiro de Rhind* (Figura 1.3), el más extenso papiro con temática matemática que ha llegado hasta nosotros, escrito entre el 2000 a.C. y el 1800 a.C., donde se encuentran algunos problemas por resolver que pueden expresarse de esta manera:

Problema n.79 del Papiro de Rhind:

En cada casa hay 7 gatos, cada uno de los cuales come 7 ratones, cada uno de los cuales ha comido 7 espigas, cada una de las cuales había producido 7 *hekat* de grano. ¿Cuántas cosas hay en total en esta historia? (El *hekat* es una unidad de medida volumétrica egipcia que equivale a unos 5 litros)



Figura 1.3

Se encuentra el mismo problema en un folio para niños, en la versión española:

“Según iba a St. Ives
encontré a un hombre con 7 esposas
cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives?”

E nella versione italiana:

“Per la strada che porta a Camogli
passava un uomo con 7 mogli.
Ogni moglie aveva 7 sacche
in ogni sacca aveva 7 gatte,
ogni gatta 7 gattini.
Fra gatti, gatte, sacche e mogli
in quanti andavano, dite, a Camogli?”

Più avanti nella storia troviamo *i pitagorici* (V secolo a.C.) e non possiamo non sospettare, guardando il loro lavoro, che non abbiano trovato molti risultati giocando con diverse configurazioni forse formate con le pietre, ma non abbiamo alcuna fonte scritta che possa confermarlo.

Il più antico rompicapo di tipo Tangram, del quale si hanno riferimenti scritti, è un puzzle geometrico descritto su parti di copie manoscritte delle opere di *Archimede di Siracusa* (287 a.C.-212 a.C.), corrispondenti ad un trattato che porta il nome di *Stomachion*. Il puzzle consiste nella dissezione di un quadrato in 14 pezzi poligonali: 11 triangoli, 2 quadrilateri e un pentagono.

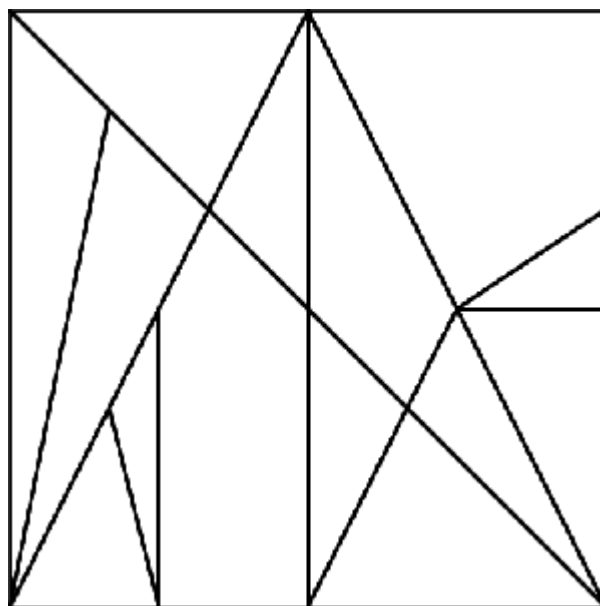


Figura 1.4

Il Dottor Reviel Netz, storico della matematica, scrive che l'intenzione di Archimede non era quella di assemblare i pezzi in un modo qualsiasi, come si usa fare nel più conosciuto Tangram, ma il suo lavoro consiste nel vedere in quanti modi diversi si possono mettere insieme i 14 pezzi per formare un quadrato (Grupo Alquerque, 2007).

Grazie agli arabi, in seguito alla conquista dell'impero persiano e alla successiva espansione, arrivò in Europa il gioco degli scacchi, di origine indiana o cinese. Una leggenda, tratta dal libro di Malba Tahan *L'uomo che sapeva contare* (1996), narra che un Principe dell'India di nome Iadava, annientò gli invasori e difese il suo regno, utilizzando un'abile strategia che richiese il sacrificio di molte vite umane, tra le quali quella del figlio Adjamir. Col passare degli anni il doloroso ricordo della guerra e della morte del figlio diveniva sempre più penoso. L'infelice Iadava passava intere giornate a ridisegnare lo schema della battaglia, come se provasse un certo piacere a rivivere in solitudine le angosce di quel lontano passato. Tutti i bramini di corte pregavano per la guarigione del loro Re ma, senza successo. Un giorno un giovane bramino, Lahur Sessa, chiese di essere ricevuto a palazzo per poter proporre al Monarca un nuovo gioco che potesse rallegrarlo e distrarlo: il gioco degli scacchi. Il Sovrano, nel giro di poche ore si appassionò al gioco e osservò che, per vincere la battaglia sulla scacchiera, aveva dovuto sacrificare un "pezzo" molto importante. Questo "pezzo" poteva essere paragonato ad un abile condottiero, quale era stato suo figlio Adjamir. Il Re comprese, in questo modo, che talvolta la morte di un principe è necessaria per assicurare pace e libertà al popolo. Egli, finalmente sollevato dalle angosce che lo opprimevano, chiese a Sessa quale dono volesse come ricompensa: un sacco pieno d'oro, uno pieno di gioielli, un palazzo o una provincia da governare. Il bramino dapprima rifiutò dicendo che aveva già ricevuto in dono la soddisfazione di aver guarito il Re Iadava ma, dopo le ripetute insistenze da parte del Sovrano, accettò di essere pagato in chicchi di grano e disse: "Mi darai un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via, raddoppiando la quantità per ogni casella fino alla sessantaquattresima e ultima". Il Monarca e tutti i cortigiani risero di questa stravagante richiesta, sorpresi di quanto il giovane bramino disprezzasse le ricchezze offerte. Ad ogni modo i matematici di corte si misero a calcolare a quanto ammontasse

la quantità di grano da donare a Sessa. Dopo poche ore comunicarono al Re che questa era l'equivalente di una montagna, con la base grande come la città in cui vivevano ed alta dieci volte l'Himalaya e che quindi, per poter adempiere alla richiesta, non sarebbe bastato mietere tutti i campi dell'India coltivati a grano per duemila anni. Facendo i calcoli, Sessa chiese 18.446.744.073.709.551.615 chicchi di grano. A questo punto, il bramino ovviamente rinunciò alla sua richiesta e fece riflettere il Sovrano su quanto può essere ingannevole l'apparenza dei numeri e di quanto si debba stare attenti nel valutare una richiesta apparentemente modesta. Sentendo queste sagge parole il Re nominò Sessa primo nobile della sua corte. Una fonte accreditata, ne *La variante de Lüneburg* (1993) di Paolo Maurensig, racconta che il re invece uccise il monaco.

Il matematico arabo *Ibn Khallikan* (1211 - 1282) è stato uno dei primi a discutere del problema dei chicchi di grano, che si racconta in questa leggenda, come indovinello matematico.

Nel Medioevo *Leonardo da Pisa* (ca.1170 - ca.1250), meglio conosciuto come Fibonacci, scrisse la sua opera *Liber Abaci* pubblicata nel 1202, nella quale descrive, utilizzando tecniche di calcolo apprese dagli arabi, una matematica numerica stupendo i suoi contemporanei al punto da essere ufficialmente proclamato, dall'Imperatore Federico II, *Stupor Mundi*. Tra i vari problemi, che sembrano quasi degli indovinelli, il più notevole è uno sull'allevamento dei conigli che ha come soluzione la famosa successione di Fibonacci:

Un uomo aveva un paio di conigli appena nati in un locale chiuso e voleva sapere quanti ne avrebbe potuti avere in un anno dalla coppia iniziale, dato il fatto che naturalmente i conigli danno alla luce una coppia al mese, e che cominciano a riprodursi a partire dal secondo mese.

Mesi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n°conigli	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

La seconda riga della tabella rappresenta i primi dodici termini della successione.

Tre secoli dopo, *Geronimo Cardano* (1501-1576) scrisse il *Liber de ludo aleae*, pubblicato postumo, un'opera sul gioco d'azzardo, con la quale anticipò di più di un secolo Pascal e Fermat nel trattamento matematico della probabilità. In quel tempo si facevano dei "duelli intellettuali" per poter ottenere una cattedra nelle università, ovvero per poter insegnare. Consistevano nel risolvere equazioni algebriche ogni volta sempre più difficili, a questi parteciparono, più o meno sportivamente, gli studenti delle università e alcuni famosi matematici come lo stesso Cardano, Tartaglia e Ferrari.

Intorno al 1650 *Antoine Gombaud, Chevalier de Meré* (1610-1685) scrisse una lettera al suo amico *Blaise Pascal* (1623-1662), con due questioni sul gioco d'azzardo. Uno dei problemi che pose il cavaliere a Pascal era come ripartire la posta di un gioco d'azzardo tra i due giocatori, con somme di partenza di pari valore, quando c'è un'interruzione prematura del gioco. Infatti in quel tempo, il gioco d'azzardo, che già era proibito, molte volte veniva interrotto dall'arrivo delle autorità e dalla conseguente fuga dei giocatori, senza avere quindi né la possibilità di terminare la partita né un vincitore. Pascal discusse la questione con *Pierre de Fermat* (1601-1665) in alcune lettere del 1654 arrivando a porre le basi per la moderna teoria della probabilità.

Un altro grande matematico interessato ai giochi fu *Gottfried Leibniz* (1646-1716) che scrisse in una lettera del 1715 "Mai gli uomini sono stati più ingegnosi che nell'invenzione dei giochi ... Sarebbe auspicabile che si facesse un intero corso di giochi trattati matematicamente". Lui e il suo contemporaneo *Christiaan Huygens* (1629-1695) proposero già in quell'epoca che venisse fatto uso del metodo matematico per analizzare il conflitto e le interazioni umane, fino alla creazione di una vera e propria disciplina.

Johann Bernoulli (1667-1748), celebre matematico del suo tempo, lanciò il problema della Brachistocrona come una sfida per i migliori matematici del suo tempo. Parteciparono alla gara matematici famosi come Leibniz, Newton, Huygens e il fratello *Jacob Bernoulli* (1654-1705) che, con la sua soluzione, diede l'avvio allo studio del calcolo delle variazioni.

Nel XVIII secolo venne formulato il famoso problema dei sette ponti di Königsberg, indovinello popolare risolto da *Leonhard Euler* (1707-1783) nel 1736. La città di Königsberg (dal 1945 Kaliningrad, città russa), nella Prussia orientale, è attraversata dal fiume Pregel che si biforca per alcuni chilometri, creando alcune isole tra le quali l'isola Kneiphof.

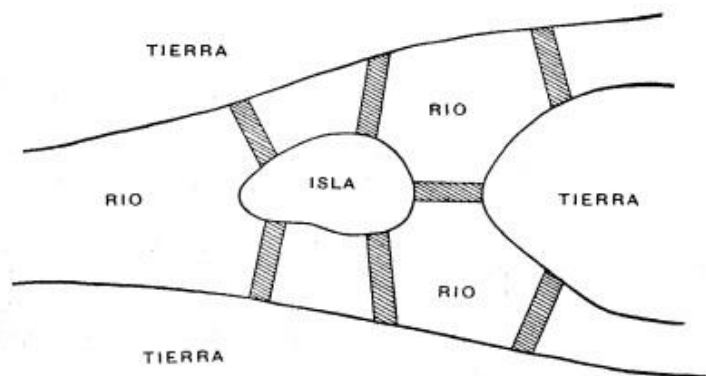


Figura 1.5

Il problema considera il terreno intorno all'isola, che è diviso dal fiume in quattro regioni unite da sette ponti, e consiste nel trovare un percorso tra le quattro regioni che passi una sola volta per ogni ponte e che torni al punto di partenza.

Il risultato è: impossibile! Non esiste un cammino con queste caratteristiche. Euler, nella sua pubblicazione del 1736 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, fornisce una soluzione generale al problema che può essere applicato a tutte le curve che oggi chiamiamo cammini euleriani.

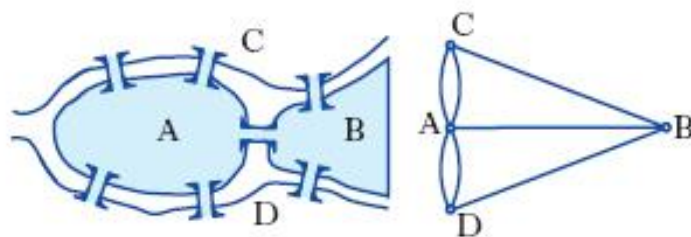


Figura 1.6

Riduce le regioni a punti e i ponti a linee e afferma che i punti, in un eventuale percorso possibile, devono necessariamente essere collegati con un numero pari di linee, quindi il problema dei sette ponti di Königsberg, dove ogni punto ha un numero dispari di linee, è impossibile. Dallo studio di questo problema e dei cammini di Eulero nacque la teoria dei grafi.

Anche il matematico *Sir William Rowan Hamilton* (1805-1865) contribuisce alla teoria dei grafi con un gioco proposto nel 1859, l'unico lavoro retribuito del matematico, chiamato *Viaggio per il mondo* (Traveller's dodecahedron).



Figura 1.7

Il gioco consiste nel trovare un percorso che passi attraverso ogni città del mondo (che sono i vertici di un dodecaedro regolare) e ritorni al vertice iniziale. Ciò che si trova è un esempio di cammino di Hamilton che è un percorso che passa attraverso tutti i vertici del solido, ma che non attraversa tutti i bordi.

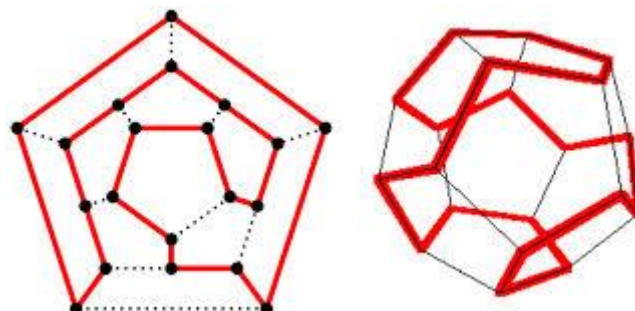


Figura 1.8

Esistono molti giochi di dissezione, un esempio è quello proposto nel 1902 sulla rivista *Weekly Dispatch*:

Trasformare un tessuto, a forma di triangolo equilatero, con tagli rettilinei, in modo che si formino quattro pezzi e che questi, collocati in un certo modo, formino un quadrato.

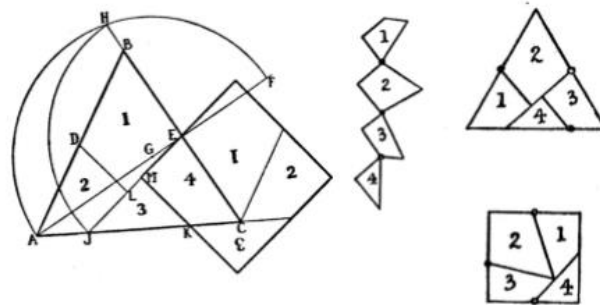


Figura 1.9

David Hilbert (1862-1943), un altro grande matematico, enunciò e dimostrò un teorema riguardante questi tipi di giochi: due poligoni nella stessa area ammettono dissezioni nello stesso numero di triangoli congruenti tra loro a due a due.

Si pubblicò nel 1912 il primo teorema matematico generale nel campo della teoria dei giochi, enunciato da *Ernst Zermelo* (1871-1956), in cui si afferma che, in ogni gioco finito con informazione perfetta, cioè ogni gioco tale che in ogni momento della partita tutti i giocatori sanno tutte le mosse fatte da tutti i giocatori e tutti i movimenti che tutti i giocatori possono fare in una futura azione, esiste una soluzione ottimale con strategie pure, cioè senza aleatorietà.

Fu il matematico *F. E. Emile Borel* (1871-1956) a introdurre l'idea di una strategia mista, cioè dove interviene l'aleatorietà, indagando sopra alcuni duelli nel 1920, e fu *John von Neumann* (1903-1957), che nel 1928 dimostrò che in ogni gioco con due persone a somma zero ci sono delle strategie miste ottime e un valore atteso.

Neumann e l'economista *Oskar Morgenstern* (1902-1977), pubblicarono nel 1944 il primo trattato moderno di teoria dei giochi, intitolato *Theory of games and Economic Behavior*. All'interno di questo libro vengono analizzati i giochi di strategia, viene

introdotto il primo modello generale e, per la prima volta, il concetto di soluzione per giochi cooperativi. In questo lavoro appare in particolare il teorema del *Minimax*, che è fondamentale per gli sviluppi matematici circa il comportamento economico.

Da questo excursus storico possiamo notare che tutti gli aspetti del sapere umano (e quindi anche del sapere matematico) sono stati sviluppati da un gruppo di individui in un certo periodo storico, in risposta al tentativo di risolvere problemi che per qualche motivo sono stati trovati entusiasmanti, necessari o urgenti; molte volte in forma di gioco. Anche in classe si dovrebbero proporre problemi-gioco stimolanti per motivare gli studenti, permettendo loro di essere parte attiva di questa ricerca.

CAPITOLO 2

METODOLOGIA DI RICERCA

2.1. AMBITO DI RICERCA

Come si è esplicitato nell'introduzione, lo studio che qui si presenta fa parte di un progetto di ricerca più ampio sul *Pensiero Matematico e la Risoluzione dei Problemi* (Pensamiento Matemático y Resolución de Problemas) realizzato all'interno della Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid e vincolato al programma Investigación en Educación Matemática Universitaria (INVEDUMAT_uni) del Instituto de Matemática Interdisciplinar. Questo ampio progetto ha come obiettivo esplorare le interazioni cognitive e affettive in diversi processi matematici, in situazioni didattiche con gli insegnanti, degli ordini scolastici di scuola secondaria inferiore e superiore (Secundaria y Bachillerato), in servizio e in formazione (Gómez-Chacón, 2015).

Per la realizzazione di questa Tesi di Laurea Magistrale si è autorizzato l'utilizzo di distinti strumenti e dati raccolti e di proprietà del progetto più ampio di cui sopra (Gómez-Chacón, 2014 e Gómez-Chacón and García-Honrado (in stampa)).

Il gruppo, oggetto dello studio, era composto da 32 studenti di età compresa tra i 21 e i 36 anni (di cui 18 donne e 13 uomini) del corso di Matemática para la Enseñanza (anno accademico 2014-2015). Questo corso è parte dell'offerta formativa per gli studenti del quarto anno di studi del Grado en Matemática della Facultad de Matemática della Universidad de la Complutense di Madrid (UCM). Essendo un corso opzionale all'interno del piano di studi, erano presenti anche tre alunni iscritti al terzo anno e quattro alunni iscritti al quarto anno del Grado en Ingeniería Matemática.

Gli alunni erano in possesso delle nozioni obbligatorie di una Laurea Triennale in matematica, ovvero tutte quelle che dovrebbe possedere uno studente che si accinge a terminare il percorso di studi di una Laurea di primo livello. Il rendimento degli studenti coinvolti nella ricerca era eterogeneo, il gruppo non presentava caratteristiche specifiche tali da essere evidenziate.

2.2. METODO DI RICERCA

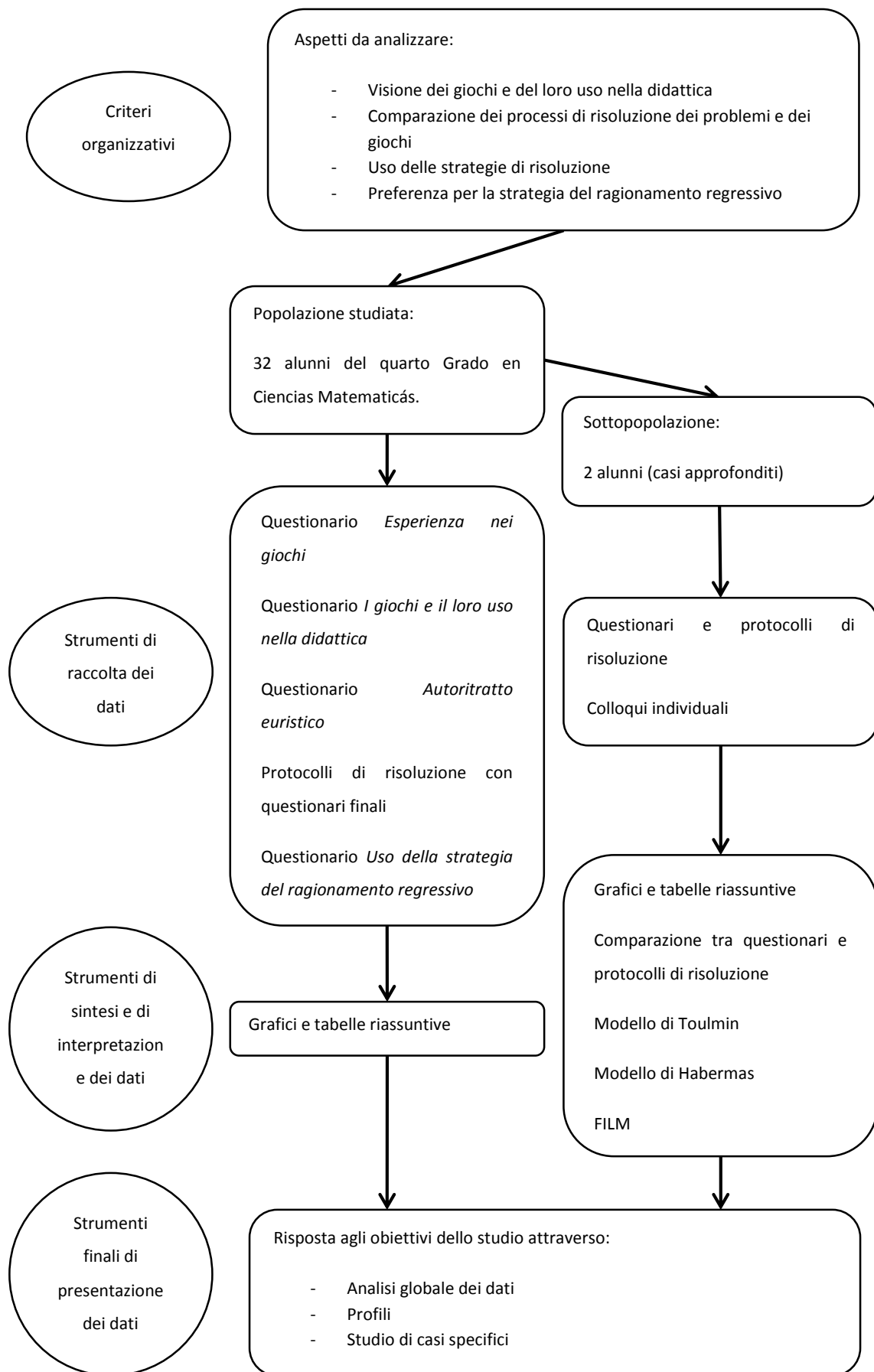
La ricerca si è basata su uno studio di tipo qualitativo. L'analisi dei dati è stata principalmente di tipo induttivo poiché le interpretazioni dei dati sono state effettuate a partire dall'informazione ottenuta.

Come strategia di ricerca si è elaborato un disegno nel quale si sono combinati la proposta di questionari attitudinali, la risoluzione di due problemi e due giochi con protocolli e la proposta di questionari sulla risoluzione stessa al gruppo classe. A tutto ciò è seguito lo studio approfondito di due casi.

Questo studio ci ha permesso di esplorare in profondità le tecniche di risoluzione utilizzate dagli studenti ed in particolare l'uso della strategia del ragionamento regressivo.

Nell'elaborazione degli strumenti di investigazione abbiamo seguito quattro livelli:

1. Prim'ordine: Strumenti di raccolta dei dati
2. Second'ordine: Criteri organizzatori dell'informazione
3. Terz'ordine: Strumenti di sintesi dell'informazione
4. Quart'ordine: Strumenti di presentazione dell'informazione



2.3. DISEGNO DEGLI STRUMENTI DI RACCOLTA DEI DATI

Per osservare la possibile relazione tra l'euristica dei giochi di strategia e quella della risoluzione dei problemi è stato necessario utilizzare distinte fonti di informazione: questionari attitudinali, protocolli di risoluzione individuali, questionari finali e colloqui individuali (Gómez-Chacón, 2014 e Gómez-Chacón and García-Honrado (in stampa)).

2.3.1. Questionari attitudinali

Sono stati proposti tre questionari attitudinali su piattaforma drive:

- Questionario 1: *Esperienza nei giochi.*
- Questionario 2: *I giochi e il loro uso nella didattica.*
- Questionario 3: *Autoritratto euristico.*

L'obiettivo del primo questionario era comparare l'idea che gli studenti avevano riguardo ai giochi da tavola e ai videogiochi. I quesiti posti vertevano sull'interesse per i giochi da tavola, e per qualsiasi tipo di videogioco on-line o su piattaforma, sulla frequenza della loro pratica e sulla conoscenza dei giochi di strategia. Il secondo questionario aveva come fine valutare il pensiero degli studenti sull'uso dei giochi nella didattica. I quesiti vertevano sull'opinione che gli studenti hanno dei giochi, su cosa pensano dell'uso dei giochi all'interno della lezione di matematica e sull'analogia tra giochi di strategia e risoluzione dei problemi. Il terzo questionario serviva per cercare di valutare il modo di pensare degli studenti per poterlo comparare con i protocolli di risoluzione dei problemi proposti. I quesiti riguardavano le mete e gli obiettivi degli intervistati e gli aspetti cognitivi, esterni e affettivi, che influenzano il loro studio.

Ogni questionario può essere diviso in due parti. La prima parte, comune a tutti, è composta da una serie di domande per caratterizzare l'individuo e il suo grado di formazione: età, sesso, Grado studiato e anno di corso frequentato. Nella seconda parte, il corpo centrale, ogni questionario presenta invece delle caratteristiche differenti.

Il Questionario 1 ha un corpo centrale composto da 9 domande divise in due parti:

- 6 domande sull'interesse per i giochi da tavola e su piattaforma elettronica e sulla frequenza della loro pratica.
- 3 domande sulla conoscenza dei giochi di strategia.

Il Questionario 2 ha un corpo centrale composto da 6 domande divise in due parti:

- 2 domande riguardante l'opinione degli studenti per i giochi.
- 4 domande riguardante l'opinione degli studenti sull'uso dei giochi all'interno della lezione di matematica.

Il Questionario 3 ha un corpo centrale composto da 5 domande divise due parti:

- 1 domanda riguardante gli obiettivi della carriera scolastica seguita dagli intervistati.
- 4 domande sugli aspetti che più influiscono sul loro apprendimento.

2.3.2. Protocolli di risoluzione individuali

Sono stati presentati due problemi e due giochi al gruppo di studenti. In linea con l'obiettivo della ricerca sono stati scelti in modo tale che, tra le varie strategie di risoluzione possibili, ammettessero anche quella del ragionamento regressivo.

Si è chiesto agli studenti di risolvere sia i problemi che i giochi con dei protocolli di risoluzione strutturati, dividendo il foglio di lavoro in due parti e scrivendo in una la risoluzione vera e propria del problema e nell'altra i procedimenti mentali che guidano lo studente nella risoluzione.

2.3.2.1. I Problemi

Problema 1: Fagioli rossi e bianchi

“In un sacco bianco ci sono 2000 fagioli bianchi e in uno rosso ce ne sono 3000 rossi. Passa 50 fagioli dal sacco bianco al sacco rosso. Mescola bene e tira fuori dal sacco rosso 50 fagioli che, senza guardarli, metti nel sacco bianco. Mescola bene i fagioli del sacco bianco e ripeti l'operazione ora con 100 fagioli ovvero, passa 100 fagioli dal sacco

bianco a quello rosso, mescola bene e passane dal sacco rosso a quello bianco di nuovo 100. Ora ripeti una terza volta l'operazione con 150 fagioli. Alla fine ci saranno più fagioli bianchi nel sacco rosso che fagioli rossi nel sacco bianco o viceversa?"

Possibile risoluzione del Problema 1

La strategia di risoluzione proposta in classe (Gómez-Chacón, 2014): *Partire dalla fine, supporre il problema risolto.*

Risultato: nei due sacchi, dopo tutti i passaggi, c'è lo stesso numero di fagioli bianchi nel sacco rosso che rossi nel sacco bianco.

Definiamo:

B : numero totale di fagioli nel sacco bianco

R : numero totale di fagioli nel sacco rosso

b_B : numero di fagioli bianchi che ci sono nel sacco bianco alla fine dei diversi passaggi

b_R : numero di fagioli bianchi che ci sono nel sacco rosso alla fine dei diversi passaggi

r_B : numero di fagioli rossi che ci sono nel sacco bianco alla fine dei diversi passaggi

r_R : numero di fagioli rossi che ci sono nel sacco rosso alla fine dei diversi passaggi

Siccome al principio tutti i fagioli bianchi sono all'interno del sacco bianco e tutti i fagioli rossi sono all'interno del sacco rosso possiamo scrivere le due equazioni che illustrano le configurazioni iniziali:

$$B = b_B + b_R$$

$$R = r_B + r_R$$

Mentre alla fine del procedimento, le due configurazioni saranno:

$$B = b_B + r_B$$

$$R = b_R + r_R$$

Quindi non resta che eguagliare le espressioni ottenendo:

$$B = b_B + b_R = b_B + r_B$$

Che implica:

$$b_R = r_B$$

Si è così verificato che effettivamente alla fine del processo il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso sarà lo stesso che il numero di fagioli rossi nel sacco bianco.

Problema 2: Cammini

“Quanti cammini, consistenti in una successione di segmenti orizzontali e/o verticali, si possono contare nella figura (dove abbiamo indicato un possibile cammino) in modo che ogni segmento unisca una coppia di numeri consecutivi, per formare, dall’inizio alla fine del cammino, il numero 1234567?”

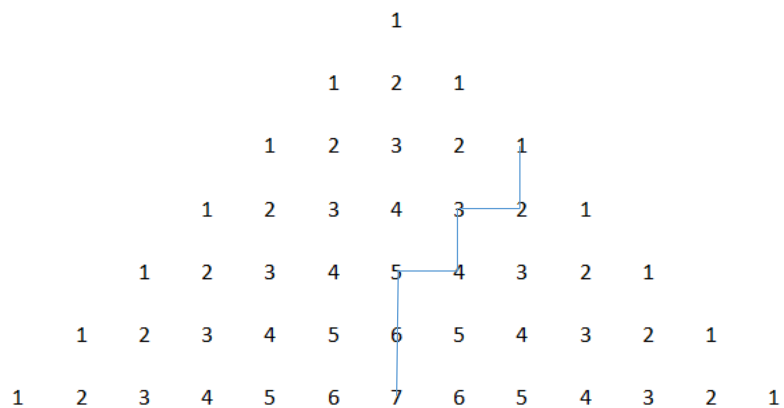


Figura 2.1

Possibile risoluzione del Problema 2

La strategia di risoluzione proposta in classe (Gómez-Chacón, 2014): *Partire dalla fine, supporre il problema risolto*

Tutti i cammini terminano con l'unico numero 7 esistente nella figura, al centro della base del triangolo. Il problema risulta più semplice se si iniziano a contare i cammini partendo dalla fine, ovvero se cerchiamo tutti i possibili 7654321, iniziando con il 7 e percorrendo segmenti orizzontali e verticali (Gómez-Chacón, 2014).

Tenendo in conto la simmetria del problema possiamo iniziare a considerare la metà sinistra del triangolo come nella figura 2.2.

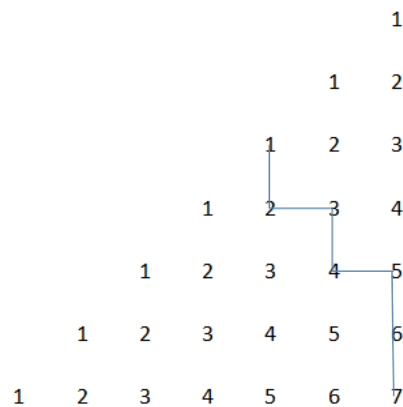


Figura 2.2

Iniziando con il 7, tenendo conto della figura 2.2, a ogni passo possiamo scegliere due direzioni: verso sinistra o verso l'alto. Siccome ogni cammino ha 6 passi, che sono 7-6, 6-5, 5-4, 4-3, 3-2, 2-1, esistono in totale 2^6 cammini in questa figura. Per simmetria, nella metà di destra del triangolo, ovvero la figura 2.3, esisteranno altri 2^6 cammini.

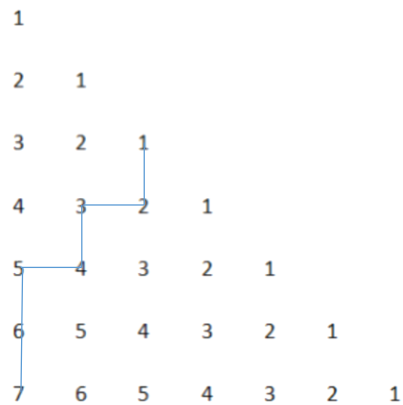


Figura 2.3

Facendo queste osservazioni possiamo notare che il cammino centrale, ovvero quello che inizia con il 7 e termina con l'1 nel vertice in alto del triangolo, è stato contato due volte.

Quindi in totale, esistono:

totale cammini della prima metà + totale cammini della seconda metà - un cammino comune alle due metà

$$2^6 + 2^6 - 1 \text{ cammini, ovvero:}$$

$$2^6 + 2^6 - 1 = 127 \text{ cammini}$$

Il risultato sarà quindi 127 cammini totali.

2.3.2.2. I Giochi

Come si è sottolineato nel capitolo 1, i giochi matematici possono permettere di sviluppare abilità specifiche utili per la risoluzione dei problemi, sempre che siano applicati con un obiettivo chiaro e in un ambiente dove si stimoli il pensare matematicamente per generare delle situazioni problema che appartengano al dominio più generale di obiettivi matematici.

In questa ricerca si sono utilizzati due giochi: Il Solitario Triangolare e Il Solitario della Bastiglia. Si è scelto di usarli perché, gli stessi, sono già stati utilizzati in sperimentazioni precedenti per introdurre distinti processi euristici di risoluzione dei problemi (Gómez-Chacón, 1988 e 1992). In particolare, il Solitario Triangolare è stato utilizzato da Gómez-Chacón in alcune ricerche sulla risoluzione dei problemi e lo sviluppo del processo euristico del ragionamento regressivo e di quello induttivo, con studenti degli ordini scolastici di Secundaria e Bachillerato (14-18 anni) e in seguito da Corbalán (Corbalán, 1994 e 1997), con studenti dell'Educación Secundaria Obligatoria (12-16 anni).

Come per tutti i giochi di strategia, l'uso dei solitari nella didattica della matematica, ha un forte impatto sullo sviluppo dei procedimenti tipici del pensiero matematico e sulle abilità specifiche di risoluzione dei problemi. Inoltre ha il vantaggio di permettere agli studenti di investigare autonomamente sul proprio processo di risoluzione.

Gioco 1: Il Solitario Triangolare

Il primo gioco proposto, il Solitario Triangolare (Gómez-Chacón, 1992) per una sola persona, richiede un tavolo da gioco con 15 caselle come mostrato in figura.

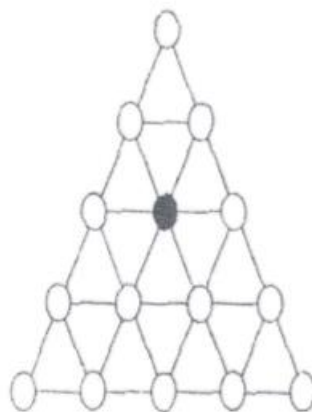


Figura 2.4

Si procede nel modo seguente:

1. Si collocano le pedine in tutte le caselle, eccetto in quella segnata in nero.

2. Il giocatore può muovere tante pedine quante sono le possibilità di saltare una pedina, adiacente a una casella vuota (lungo la linea); allo stesso tempo si “mangia” e si ritira dal tavolo da gioco la pedina saltata. Tutte le pedine si muoveranno in questo modo. Le pedine possono muoversi su tutto il tavolo da gioco.

Il giocatore vince quando rimane una sola pedina.

Gioco 2: Il Solitario della Bastiglia

Il secondo gioco proposto, il Solitario della Bastiglia per una sola persona, richiede un tavolo da gioco con 33 caselle come mostrato in figura.

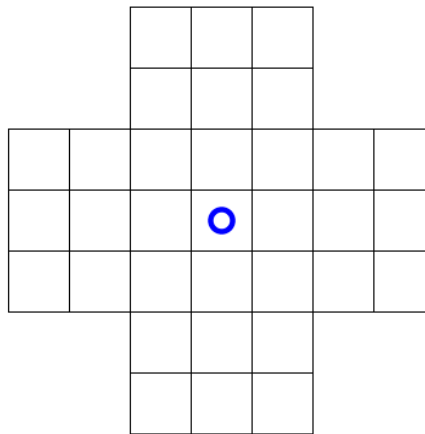


Figura 2.5

Si procede nel modo seguente:

1. Si collocano le pedine in tutte le caselle, eccetto in quella segnata con un piccolo cerchio.
2. Mediante una serie di “salti” si elimineranno tutte le pedine eccetto una che solitamente rimane nella casella centrale. Un “salto” consiste nel muovere una pedina in linea retta sopra qualunque pedina adiacente per atterrare nella casella vuota seguente, nel senso sinistra-destra o alto-basso, non in diagonale. La pedina saltata si ritira dal tavolo da gioco.

Raggiungere l’obiettivo consiste nell’eliminare 31 pedine dal tavolo da gioco.

Il giocatore vince quando rimane una sola pedina nella casella centrale.

Verrà proposta un'analisi approfondita e dettagliata delle possibili strategie, che si possono usare per la risoluzione dei due giochi utilizzati nella sperimentazione, nel capitolo 3.

Il Solitario Triangolare è stato proposto individualmente, dotando gli studenti del tavolo da gioco stilizzato (dell'immagine di cui sopra) stampato su un foglio di carta. Per il Solitario della Bastiglia, invece, oltre al tavolo da gioco stilizzato stampato su carta, è stata data la possibilità agli studenti, che questa volta lavoravano a coppie, di poter utilizzare il Personal Computer, giocando ad una delle versioni che si trovano on-line; precisamente tramite la pagina web <http://www.coolmath-games.com/0-pegsolitaire>.

2.3.2.3. Tempo di risoluzione

Il tempo a disposizione per la risoluzione dei due problemi, che sono stati proposti contemporaneamente, è stato di 120 minuti. Quello a disposizione per la risoluzione del solitario della Bastiglia è stato invece di 60 minuti. Per quanto riguarda il Solitario Triangolare, invece, si è permesso agli studenti, dopo i 60 minuti messi a disposizione in aula, di portare il protocollo di risoluzione a casa, in modo da dar loro la possibilità di terminare la risoluzione in modo più dettagliato. La delimitazione di questo tempo è stata determinata, da una parte, dalla scansione degli orari delle lezioni della struttura istituzionale, e dall'altra dal fatto che non sono necessari più 15-20 minuti per familiarizzare con il problema ed iniziare il procedimento applicando le strategie di risoluzione. Dopo 60 minuti, in genere, si dovrebbe già avere un piano di strategie avviato, anche se non necessariamente vincente.

2.3.3. Questionari finali

Al termine della risoluzione dei problemi e dei giochi sono stati proposti due questionari finali.

- Questionario 4: *Protocollo di risoluzione* (solamente al termine dei protocolli di risoluzione dei problemi).
- Questionario 5: *Strategia dell'iniziare dalla fine e lavorare con il ragionamento regressivo* (solamente al termine dei protocolli di risoluzione dei problemi e del Solitario Triangolare).

L'obiettivo del questionario 4 è stato quello di indagare sulla risoluzione del problema. I quesiti vertevano sulla conoscenza pregressa, da parte degli studenti, di un problema simile o uguale, sulle intuizioni iniziali per la risoluzione, sul processo di risoluzione e sulle strategie utilizzate. L'obiettivo del questionario 5 è stato quello di indagare sull'uso della strategia del ragionamento regressivo. I quesiti vertevano sull'utilizzo della strategia in generale e nel problema specifico.

Il Questionario 4 ha un corpo formato da 7 domande divise in tre parti:

- 2 domande su problemi analoghi.
- 2 domande su come si è affrontato il problema.
- 3 domande sulla risoluzione.

Il Questionario 5 ha un corpo formato da 3 domande,

- 1 domanda sull'uso del ragionamento regressivo solitamente.
- 2 domande sull'uso del ragionamento regressivo all'interno del problema specifico.

2.3.4. Colloqui individuali

A partire dai risultati delle analisi dei questionari e dei protocolli di risoluzione sono stati selezionati 2 studenti per lo studio approfondito dei casi. Questo si è realizzato attraverso un colloquio che ha avuto l'obiettivo di comprendere in profondità l'uso che gli studenti fanno delle strategie di risoluzione, i procedimenti mentali che fanno sì che passino da una strategia all'altra durante la risoluzione e in particolare l'uso della strategia di risoluzione del ragionamento regressivo.

Il colloquio era strutturato con una serie di domande che hanno permesso di avere informazioni dettagliate sullo svolgimento dei protocolli di risoluzione e sulle difficoltà

avute nella loro realizzazione: dubbi su ciò che gli studenti hanno scritto nella risoluzione, approfondimenti sul perché dell'uso di specifiche strategie, approfondimenti sull'uso della strategia del ragionamento regressivo.

I colloqui sono stati di circa 30 minuti ciascuno, uno è stato videoregistrato mentre dell'altro è stata raccolta la produzione scritta dello studente durante il colloquio.

Nella scelta dei casi si è proceduto in questo modo. L'analisi quantitativa dei questionari e dei protocolli di risoluzione ha permesso di stabilire una serie di profili, che sono stati definiti intorno a due assi principali: *l'attitudine per i giochi e il loro uso nella didattica*, estratto dall'analisi dei questionari attitudinali, e *l'uso delle strategie di risoluzione*, estratto dall'analisi dei protocolli di risoluzione. Una volta stabiliti i profili si è identificato ciascuno studente con uno di questi. Per lo studio dei casi si sono selezionati 2 studenti, rappresentativi di due dei profili definiti e che avessero prodotto, in particolare, dei buoni protocolli con uno sviluppo dettagliato.

2.4. ANALISI DEI DATI

L'analisi dei dati si è realizzata durante tutto il processo di sperimentazione. Il trattamento dei dati si è realizzato in conformità con le seguenti fasi:

1. Analisi dei questionari attitudinali.
2. Analisi quantitativa dei protocolli di risoluzione e dei questionari finali.
3. Analisi qualitativa dei protocolli di risoluzione degli studenti selezionati per lo studio dei casi.
4. Analisi dei colloqui con gli studenti selezionati.
5. Analisi congiunta delle informazioni per lo studio dei casi.

2.4.1. Strategia di analisi dei questionari attitudinali

Per l'analisi dei questionari attitudinali si è optato per un'analisi quantitativa attraverso grafici di frequenza e percentuale.

Dal Questionario 1, in base alle risposte del corpo centrale, si sono potuti estrarre 5 differenti profili. Ogni studente è stato inserito in uno di questi.

- P1. Studente interessato ai giochi, pratica sia quelli da tavola che quelli più tecnologici.
- P2. Studente interessato ai giochi, non pratica quelli più tecnologici.
- P3. Studente poco interessato ai giochi, pratica quelli più tecnologici.
- P4. Studente interessato ai giochi ma, che non pratica nessun tipo di gioco.
- P5. Studente non interessato ai giochi e che non pratica nessun tipo di gioco.

Dal Questionario 2, in base alle risposte del corpo centrale si sono potuti estrarre 4 differenti profili. Anche in questo caso ogni studente è stato inserito in uno di questi.

- P1. Studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'alta opinione sui giochi
- P2. Studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione media sui giochi
- P3. Studente più o meno favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione medio-alta sui giochi
- P4. Studente non favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione medio-bassa sui giochi

Dall'analisi combinata dei due questionari si sono infine estratti 6 profili generali che riguardano l'attitudine per i giochi e il loro uso nella didattica. Anche in questo caso ogni studente è stato inserito in uno di questi.

- GF. Giocatori, favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- NGF. Non giocatori, favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- G±. Giocatori, più o meno favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- NG±. Non giocatori, più o meno favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- GNF. Giocatori, non favorevoli all'uso dei giochi nella didattica

NGNF Non giocatori, non favorevoli all'uso dei giochi nella didattica

Anche per il Questionario 3 è stata fatta un'analisi quantitativa delle risposte ma, nelle risposte, non si è riscontrata una regolarità tale da poter creare dei profili; lo stesso è stato quindi utilizzato, alunno per alunno, come supporto e arricchimento dell'analisi qualitativa dei protocolli di risoluzione.

2.4.2. Strategia di analisi dei protocolli di risoluzione

Per l'esame dei protocolli di risoluzione si è optato per una doppia analisi: una di carattere quantitativo, attraverso l'uso di grafici di frequenza e percentuale delle strategie usate da ogni studente, l'altra di carattere qualitativo attraverso l'uso di lenti di analisi specifiche.

Si è iniziato realizzando una analisi dettagliata dei protocolli di risoluzione con due metodiche differenti:

- La prima, problema per problema, ci ha permesso di stabilire le percentuali di utilizzo delle strategie e le percentuali di conclusioni positive ai problemi proposti.
- La seconda, alunno per alunno, ci ha permesso di notare la ripetizione nell'uso di strategie quindi l'eventuale transfert dell'uso di una certa strategia da un problema all'altro.

Dalla prima analisi si è potuta ottenere una classificazione delle strategie usate in base alle percentuali di utilizzo e alla loro efficacia.

Per la classificazione in base alle percentuali impiegate si è tenuto conto semplicemente del numero di studenti che hanno utilizzato una data strategia all'interno della risoluzione dei due problemi e dei due giochi.

Per la classificazione in base all'efficacia delle strategie, per ogni problema o gioco, si è tenuto conto dei seguenti aspetti:

- *Percentuale di studenti che usano una data strategia all'interno della risoluzione:* rappresenta la percentuale di alunni, sul totale, che usa una data strategia nel protocollo di risoluzione di un dato problema
- *Percentuale di studenti che arrivano a una conclusione positiva usando quella data strategia:* rappresenta la percentuale di alunni, su quelli che hanno usato una certa strategia, che è arrivata a una conclusione positiva nella risoluzione di un dato problema
- *Indice di esito:* rappresenta la relazione che c'è tra un numero di conclusioni positive, usando una certa strategia per un dato problema, e il numero di utilizzi di tale strategia per la risoluzione del suddetto problema.

Dalla seconda analisi, si è potuto stabilire quali strategie sono state usate ripetutamente dallo stesso studente nella risoluzione dei diversi compiti. In particolare si sono potuti creare 4 profili in base all'uso della strategia del ragionamento regressivo all'interno dei protocolli di risoluzione.

- P1. Studente che utilizza il ragionamento regressivo in problemi e giochi
- P2. Studente che utilizza il ragionamento regressivo solamente nella risoluzione dei problemi
- P3. Studente che utilizza il ragionamento regressivo solamente nella risoluzione dei giochi
- P4. Studente che non lo utilizza affatto

Per quanto riguarda l'analisi qualitativa dei protocolli di risoluzione si è optato di limitarla ai protocolli dei due casi selezionati e si è deciso di usare tre strutture metodologiche di interpretazione differenti:

- Il Modello per l'argomentazione di Stephen Toulmin (come adattato in Boero e altri, 2010; come adattato in Arzarello 2014);
- La Costruzione dei "comportamenti razionali" di Jürgen Habermas (come adattato in Boero e altri, 2010; come adattato in Martignone & Sabena, 2014);

- “A Finer Logic of Inquiry Model”, rielaborazione del Professor Ferdinando Arzarello della “Logica della domanda” di Jaakko Hintikka (come adattato in Arzarello 2014).

2.4.2.1. Il Modello per l’argomentazione di Stephen Toulmin

Il modello di Toulmin consiste in tre elementi fondamentali:

- C (*Claim*): le affermazioni di chi sta parlando
- D (*Data*): le giustificazioni del *claim*
- W (*Warrant*): le regole di inferenza con cui *data* è connesso con il *claim*

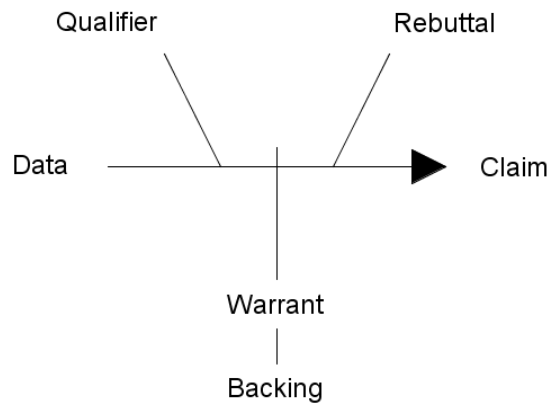
Il *claim* è un’affermazione, un’opinione, una tesi che qualcuno deve giustificare, i dati che supportano questa affermazione vengono chiamati *data*, mentre fanno parte del *warrant* tutte le giustificazioni per usare i suddetti dati a supporto dell’affermazione, ovvero tutte quelle affermazioni che garantiscono la legittimità del passaggio tra *data* e *claim*.

Oltre ai tre elementi fondamentali vi sono altri tre elementi a supporto dei precedenti:

- B (*Backing*): supporto delle regole di inferenza
- Q (*Qualifier*): la forza delle affermazioni
- Re (*Rebuttal*): le eccezioni alle regole

Le basi che supportano e giustificano il *warrant* vengono chiamate *backing*, usando aggettivi come “probabile”, “certo”, ecc. si esprime la forza delle affermazioni pronunciate, questo è il *qualifier*, mentre fanno parte del *rebuttal* tutte quelle affermazioni che sono delle eccezioni alle regole e che indeboliscono il *warrant*.

I sei elementi sono relazionati come nella seguente figura.



2.4.2.2. La Costruzione dei “comportamenti razionali” di J. Habermas

Nel modello proposto da Habermas per l’analisi dei comportamenti razionali con cui si possono analizzare i processi di risoluzione dei problemi, vengono presi in considerazione tre aspetti in relazione tra loro:

- La componente *epistemica*
- La componente *teleologica*
- La componente *comunicativa*

Le valutazioni cosce delle affermazioni pronunciate, ovvero gli aspetti di controllo delle stesse e delle catene logiche, la prova della loro validità, fanno parte dell’aspetto *epistemico*; le scelte consapevoli degli strumenti per raggiungere l’obiettivo dell’attività, ovvero le azioni cosce per arrivare a ottenere un esito positivo fanno parte dell’aspetto *teleologico*; fanno invece parte dell’aspetto *comunicativo* le scelte consapevoli del linguaggio comunicativo, ovvero i modi in cui vengono comunicati i passi del ragionamento.

2.4.2.3. “A Finer Logic of Inquiry Model”, rielaborazione del Professor F. Arzarello della “Logica della domanda” di J. Hintikka.

Jaakko Hintikka, filosofo e logico danese, sviluppa quella che lui chiama *Logic of Inquiry* (Logica della Domanda) dopo una continua ricerca iniziata negli anni '70, per superare l'approccio statico dell'abituale ragionamento logico matematico. L'idea, già elaborata dai filosofi greci antichi, è quella della costruzione della conoscenza attraverso un processo di interrogazione, implicito o esplicito che sia, la conoscenza come frutto della ricerca generata da una specifica domanda. Il filosofo la introduce quindi come la logica della domanda e della risposta o meglio di sequenze di domande e risposte.

Per ovviare alla limitatezza e all'eccessiva astrattezza delle definizioni di verità proposte da Tarski, che lasciano inspiegato il percorso dei pensieri per arrivare a questa, Hintikka riprende l'idea dei giochi linguistici di Wittgenstein e alcuni aspetti della teoria dei giochi, elaborando una teoria in cui il centro focale è il percorso verso la formulazione di una verità che invece di procedere ricorsivamente dalle formule atomiche a quelle più complesse inverte l'approccio e procede da quelle più complesse alle loro costituenti più semplici.

Inoltre, Hintikka, per qualsiasi attività goal-oriented che può essere concettualizzata come gioco nel senso della teoria matematica dei giochi, distingue due tipi di regole che la governano: le regole definitorie e i principi strategici. Le regole definitorie sono quelle regole che determinano quali azioni si possono compiere, cercando di raggiungere l'obiettivo dell'attività, le cosiddette regole di inferenza. I principi strategici invece sono quelli che determinano quale di queste azioni è meglio compiere e in che ordine, per raggiungere l'obiettivo il più rapidamente e nel miglior modo possibile. La definizione di verità elaborata dal filosofo impiega la nozione di strategia vincente: è in base a questa che è possibile la nuova definizione di verità rispetto a quella data da Tarski.

Il modello rielaborato dal Professor Arzarello nel suo articolo (2014), più usufruibile per analizzare le interazioni tra le componenti strategiche e deduttive nei protocolli di risoluzione degli studenti, ha una struttura articolata da due componenti:

- IC (Inquiry Component): componente di ricerca
- DC (Deductive Component): componente deduttiva

La *componente di ricerca* (IC) è una fase all'interno della risoluzione in cui i soggetti coinvolti alternano una serie di domande, esplorazioni e risposte, in accordo con la "Logic of Inquiry" di Hintikka. In questa fase il soggetto è coinvolto profondamente nell'attività e il suo scopo è raggiungere l'obiettivo del problema, verificando le congetture che man mano scaturiscono dalle esplorazioni del problema. Queste ultime possono essere di due tipi:

- Una vera e propria *esplorazione* con lo scopo di analizzare e comprendere la situazione nella quale il soggetto è coinvolto
- Una esplorazione di *controllo* con lo scopo di verificare delle idee o congetture che sono state portate durante lo svolgimento dell'attività

Questa sequenza di azioni compiute del soggetto è caratterizzata da tre differenti modalità:

- Modalità ascendente,
- Modalità neutrale,
- Modalità discendente.

La *modalità ascendente* è quella che concerne il passaggio nella mente del soggetto dall'esplorazione del problema alla formazione di una congettura, riguarda quindi la formazione di un'idea a seguito di una fase di ricerca e analisi della situazione. Quella *discendente* caratterizza invece il passaggio da una congettura o un'idea guida, alla realizzazione di una ricerca del problema come frutto della congettura o idea guida precedente. Lo scopo della modalità discendente è quello di trovare un'equivalenza tra l'oggetto di pensiero (la congettura, l'idea guida) e l'oggetto lavorato (il problema e la sua risoluzione). Quella che il Professor Arzarello chiama *modalità neutrale* invece segna il cambiamento tra una ascendente e una discendente. Per fare un collegamento con il modello di Habermas nelle modalità ascendente e discendente è rilevante la componente teleologica, mentre in quella neutrale sono rilevanti la componente epistemica e comunicativa.

Le azioni osservabili da parte del soggetto nella componente di ricerca possiamo quindi riassumerle così:

- *Domanda*
- *Affermazione*
- *Congettura*
- *Esplorazione*
- *Controllo*
- Formulazione di un *Piano* di risoluzione.

La *componente deduttiva* (DC) è una fase dell'attività in cui il soggetto non è coinvolto direttamente nella ricerca di congetture e nella loro verifica. Questa seconda componente è caratterizzata dall'uso, da parte del soggetto, di un linguaggio con carattere logico utilizzato per formulare le verità trovate durante la fase di ricerca in modo formale.

Alle modalità di azione osservabili nella componente di ricerca si aggiungono due modalità specifiche della componente deduttiva:

- Modalità distaccata
- Controllo logico

Quella che Arzarello chiama *modalità distaccata* è caratteristica di quelle fasi in cui è chiaro il diverso punto di vista del soggetto rispetto all'attività svolta, il linguaggio in questa fase assume una forte connotazione logica e formale. Il *controllo logico* invece è una specifica modalità discendente dove l'idea guida è la struttura logica in generale mentre l'oggetto di lavoro è una frase specifica di controllo dell'azione compiuta.

Alle azioni della componente di ricerca si aggiungono quelle tipiche della componente deduttiva, che sono:

- *Passi deduttivi*
- *Catene logiche*

Le due componenti spesso non sono ben distinte l'una dall'altra, durante la risoluzione di un problema il soggetto passa da una componente all'altra anche più di una volta.

Possiamo dire quindi che la struttura tipica che assumono è annidata in questo modo: (IC ~ (DC ~ (IC ...))) con IC ~ DC il passaggio da una all'altra.

Possiamo riassumerli con la tabella 2.1.

Azioni osservabili		Modalità
<i>Generali</i>	<i>Specifiche</i>	
Espressioni verbali	Domande	Ascendente
Scritte	Affermazioni	Neutrale
Gesti	Congetture	Discendente
Altre (sguardo, ...)	Esplorazioni	Distaccata
Silenzio	Controlli	Controllo logico
Formulazione di un piano		
Passi deduttivi		
Catene deduttive		

Tabella 2.1

2.4.3. Strategia di analisi dei questionari finali

Per l'analisi dei questionari finali si è preferita un'analisi quantitativa attraverso grafici di frequenza e percentuale che sono stati utilizzati, alunno per alunno, come supporto e arricchimento all'analisi qualitativa dei protocolli di risoluzione.

2.4.4. Strategia di analisi dei colloqui individuali

Uno dei due colloqui è stato videoregistrato. L'analisi dei video di questo colloquio verrà effettuata con l'uso delle tre lenti utilizzate per l'analisi dei protocolli di risoluzione, con particolare attenzione ai gesti e alle espressioni dello studente intervistato, cosa impossibile da fare per l'analisi dei protocolli di risoluzione.

Il secondo colloquio non è stato videoregistrato, di questo rimangono dei protocolli che sono approfondimento e miglioria dei protocolli di risoluzione dei problemi e dei giochi. Anche per questi protocolli l'analisi verrà effettuata con l'uso delle tre lenti nominate in precedenza.

CAPITOLO 3

ANALISI DEI GIOCHI: EURISTICA E CONTENUTO MATEMATICO

Nella nostra ricerca utilizzeremo due giochi del tipo solitario: il Solitario Inglese, chiamato anche Solitario della Bastiglia, Solitaire in Inghilterra o Peg Solitaire negli Stati Uniti, e una versione modificata dello stesso, giocata su un campo da gioco triangolare. Abbiamo scelto questi giochi per il fatto che hanno delle regole semplici da capire e quindi si può iniziare a giocare rapidamente, e, ai fini della nostra ricerca, perché una delle possibili strategie di risoluzione è il ragionamento regressivo.

3.1. SOLITARIO DELLA BASTIGLIA (O SOLITARIO INGLESE)



Figura 3.1

3.1.1. Tavolo da gioco e pedine

Il campo da gioco del Solitario Inglese, il più conosciuto tra le varie versioni dello stesso, consiste in una croce greca, quindi con bracci della stessa lunghezza, formata

da caselle, fori o depressioni allineati 3 a 3 sia in senso verticale che orizzontale, per un totale di 33 posizioni.

Le pedine, a seconda di come sono le posizioni del tavolo da gioco, potranno essere sferiche per adattarsi alle depressioni (come nella foto), a forma di piolo per incastrarsi nei fori o semplici se si tratta di caselle.

3.1.2. Storia

Sono incerte le origini storiche di questo gioco, una leggenda racconta che nel XVIII secolo un aristocratico francese fu confinato in una cella isolata all'interno della Bastiglia. Il nobile, annoiato e solo, inventò il solitario per sopportare l'isolamento. Un'altra leggenda racconta che un esploratore francese vide gli indigeni americani inserire le frecce nei buchi di una tavola in legno, questi buchi disposti simmetricamente ricalcavano il tavolo da gioco dell'odierno solitario e diedero all'esploratore lo spunto per codificare le regole del gioco.

Il dizionario Larousse dell'antiquariato sostiene addirittura che un gioco simile si trovi descritto dettagliatamente in un poema di Ovidio.

Di fatto si gioca su un campo da gioco che è uguale a quello del più antico, dalle origini incerte ma sicuramente già giocato nel medioevo, "La volpe e le oche", gioco per due persone popolare in quasi tutta Europa e in altre parti del mondo come Cina e India. Fa parte della famiglia dei giochi a forza diseguale ovvero quelli in cui i due giocatori hanno obiettivi diversi e giocano uno contro l'altro con un numero diverso di pedine che possono fare movimenti differenti all'interno del tavolo di gioco. È quindi molto più probabile che qualcuno nel corso della storia abbia ideato delle nuove regole e abbia convertito il gioco più antico nell'attuale solitario.

Sembra che non si diffuse in Francia fino al secolo XVI ma, già due secoli più tardi era molto popolare, lo ritroviamo addirittura rappresentato in un dipinto di *Claude-Auguste Borey* del 1697 intitolato *Madame la princesse de Soubise jouant au jeu de Solitaire* (Figura 3.2), e in un altro dipinto di *Antoine Trouvain* del 1698, *Dame de Qualité Jouant au Solitaire* (Figura 3.3).



Figura 3.2



Figura 3.3

Ebbe la sua maggiore diffusione nel secolo XVIII quando dalla Francia arrivò in Germania e poi in Inghilterra dove divenne popolare nell'epoca Vittoriana. Qui venne modificato il campo da gioco passando dai 37 fori della versione francese ai 33 fori della versione inglese, che ora è la più conosciuta.

Il primo riferimento scritto conosciuto appartiene nientemeno che a Gottfried Leibniz, che in uno scritto per l'Accademia di Berlino del 1710 afferma che il gioco è utile per perfezionare "l'arte di pensare":

"Il solitario anteriore mi aggrada molto. Io lo gioco in ordine inverso. Ovvero, al posto che giungere a una figura determinata secondo le regole del gioco, cioè saltando sopra una pedina in un foro vuoto e ritirando la pedina sopra la quale si è saltato, mi sembra meglio giocare al contrario: partendo da una figura determinata, saltando sopra un foro vuoto e ponendo una pedina nel foro vuoto sopra il quale si è saltato. In questo modo uno può proporsi il compito di formare una figura data se è possibile, come certamente lo è, se prima è stata distrutta. "Però perché tutto questo?" domanderete. Rispondo: per perfezionare l'arte dell'invenzione. Dobbiamo avere la possibilità di costruire qualunque cosa si trovi per mezzo della ragione."

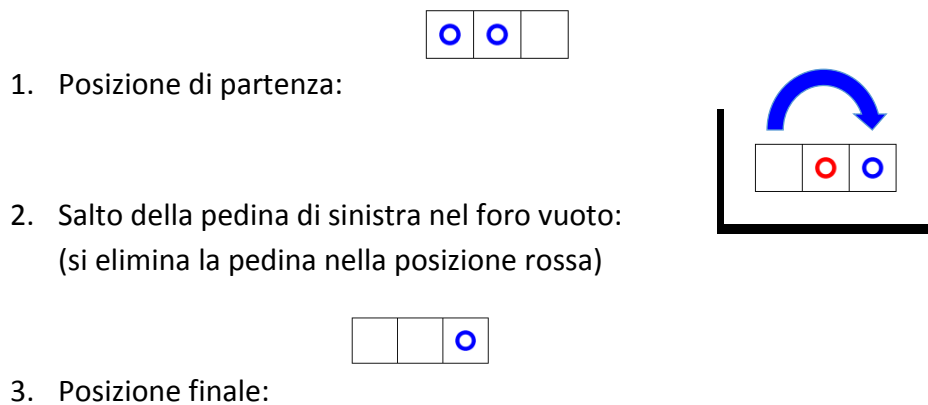
Leibniz era convinto dell'immenso valore educativo dei giochi come manifestato esplicitamente nella lettera del 1715 riportata nella sezione di storia del primo capitolo di questo lavoro. Molti altri matematici si sono interessati allo studio di questo gioco dopo Leibniz, per esempio Lucas, Beasley, Puig Adam, Conway e Miguel de Guzmán.

3.1.3. Regole

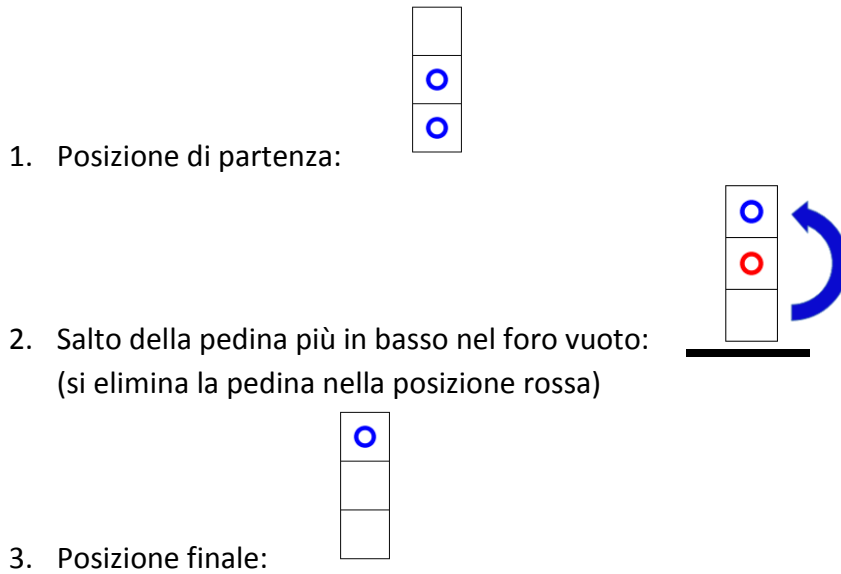
Inizialmente le pedine sono collocate nelle varie zone del tavolo da gioco, eccetto una che resta vuota, solitamente la centrale. L'obiettivo è, mediante una serie di movimenti, eliminare tutte le pedine eccetto una che dovrà rimanere nella posizione che era vuota all'inizio, ovvero quella centrale.

Il movimento base di ogni pedina è un "salto" sopra una delle pedine adiacenti che ha sul lato opposto uno spazio vuoto. Questo movimento si può fare solamente in direzione verticale e orizzontale, non obliqua, quindi in senso sinistra-destra, sopra-sotto. La pedina saltata si toglie dal tavolo da gioco.

Un movimento sinistra-destra può essere schematizzato così:



Un movimento basso-alto può essere schematizzato così:



Le pedine del Solitario Inglese sono 32, quindi l'obiettivo è eliminarne 31 e lasciare l'ultima pedina nella posizione centrale (Figura 3.4).

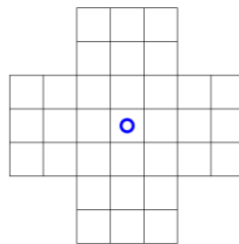


Figura 3.4

3.1.4. Analisi dei movimenti e delle strategie

Importante per iniziare l'analisi di questo gioco è utilizzare una notazione adeguata. Ci sono diversi modi per associare una notazione adeguata alle caselle del gioco, ognuno può scegliere quella che gli sembra più adatta, due esempi possono essere:

- Usare una notazione cartesiana e quindi dare a ogni colonna una lettera e a ogni riga un numero, come in un piano cartesiano, così che la notazione finale risulti:

		c7	d7	e7		
		c6	d6	e6		
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3
		c2	d2	e2		
		c1	d1	e1		

Figura 3.5

Per esempio il movimento dalla prima casella in alto a sinistra alla casella in alto a destra lo indicheremo: c7-e7

- Iniziare dalla prima casella in alto a sinistra e procedendo come nella scrittura proseguire verso destra per poi passare alla riga successiva, numerando le caselle progressivamente:

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

Figura 3.6

Per esempio il movimento dalla prima casella in alto a sinistra alla casella in alto a destra lo indicheremmo: 1-3

Per la nostra analisi utilizzeremo questa seconda notazione.

I movimenti possibili delle pedine all'interno del tavolo da gioco si possono schematizzare in due modi diversi:

- Studiando quanti movimenti, ogni posizione, può fare:

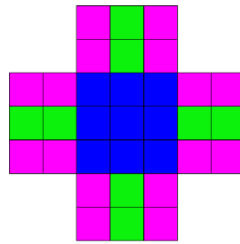


Figura 3.7

Le pedine situate nell'area blu possono muoversi in ogni direzione, destra, sinistra, alto e basso. Le pedine dell'area viola possono muoversi in due direzioni, che cambiano a seconda della posizione. Le pedine nell'area verde possono muoversi in un'unica direzione che, anche qui, dipende dalla posizione nel tavolo da gioco.

- Studiando le possibili posizioni di ogni pedina:

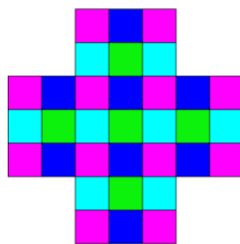


Figura 3.8

Le pedine che all'inizio del gioco si troveranno in una posizione di un certo colore, durante il gioco potranno muoversi solamente all'interno delle zone dello stesso colore.

Altra osservazione utile è che il tavolo da gioco ha quattro assi di simmetria: l'asse verticale, l'asse orizzontale e i due assi obliqui. Questo ci permette di dire che qualunque soluzione troviamo, ci saranno 7 soluzioni simmetriche ad essa. Inoltre ogni soluzione ha una cosiddetta "soluzione complementare", ovvero una soluzione che è il suo rovescio, che si ottiene facendo i movimenti nell'ordine inverso.

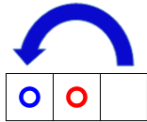
Le strategie di soluzione sono molteplici, importante è non giocare in modo aleatorio, soprattutto in questo tavolo da gioco che ha numerose pedine:

- *Partire dalla fine, supporre il problema risolto (uso del ragionamento regressivo):*

Consiste nell'iniziare con una unica pedina nel centro e riempire man mano il tavolo da gioco usando le regole al rovescio, ovvero: la pedina può fare il movimento se ha accanto due fori vuoti consecutivi, la pedina "salta" nel foro più lontano e un'altra pedina viene posizionata nel foro a metà. Le pedine possono muoversi sempre nelle due direzioni possibili: sinistra-destra, alto-basso.

Per esempio un movimento destra-sinistra (che sarebbe l'inverso di sinistra-destra giocato con le regole originali) può essere schematizzato così:

1. Posizione di partenza: 

2. Salto della pedina nel foro più lontano, ovvero il secondo alla sua sinistra in questo caso: 

(viene inserita una seconda pedina nella posizione rossa)

3. Posizione finale: 

Quindi riempiendo il tavolo da gioco si vanno ad individuare delle posizioni, delle figure che possiamo chiamare vincenti; nel senso che partendo da quella figura e procedendo secondo le regole, si può arrivare alla soluzione del gioco.

- *Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice:*

Consiste nell'iniziare con alcune configurazioni più semplici, ovvero con meno pedine sul tavolo da gioco, usando sempre le regole originali del gioco. Alcune delle posizioni iniziali possibili possono essere queste:

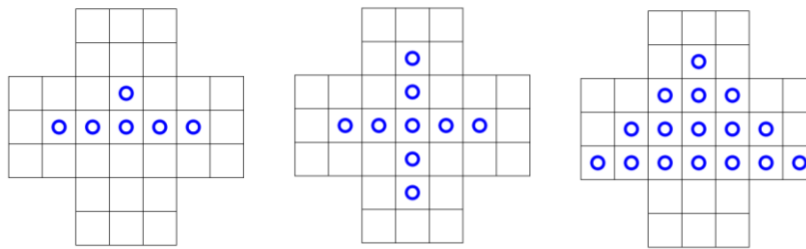


Figura 3.9

Curioso questo caso di configurazione a diamante, dove partendo dalla configurazione della figura 3.10 si può arrivare a quella della figura 3.11 e infine alla soluzione.

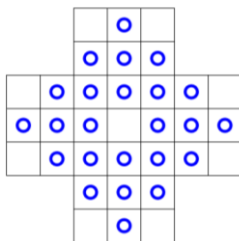


Figura 3.10

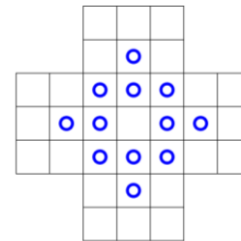


Figura 3.11

- *Decomporre il problema in problemi più piccoli, semplificare:*

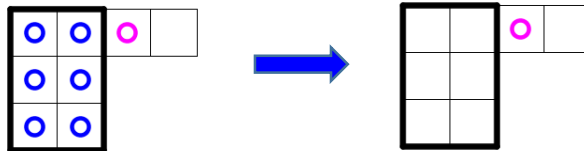
Consiste nel cercare di scomporre il tavolo da gioco in parti, usando anche la simmetria del gioco, per poi risolvere parte per parte fino ad arrivare alla soluzione.

Molto interessante è la soluzione che da Miguel De Guzmán in *Cuentos con Cuentas* (1984b). Sostanzialmente divide il tavolo da gioco in “blocchi”, ovvero in insiemi base di pedine che, attraverso una pedina esterna al blocco, chiamata catalizzatore, vengono eliminate, fino a giungere alla soluzione.

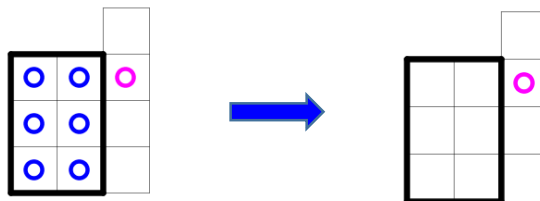
I blocchi che De Guzmán (1984b) chiama “macromovimientos” sono rappresentati dalle pedine blu mentre la pedina catalizzatore è quella viola. Le caselle vuote rappresentano i fori nel tavolo da gioco che devono essere vuoti per permettere lo “svuotamento” dell’insieme base.

La soluzione di ogni blocco è banale e non la diamo per non appesantire il discorso.

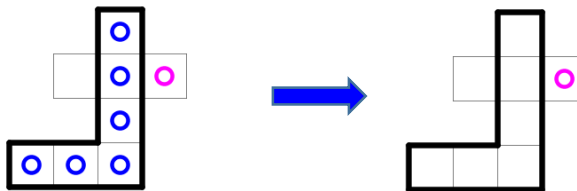
- ✓ Insieme del tipo 1: blocco rettangolare 3x2 con l'uso di due caselle esterne



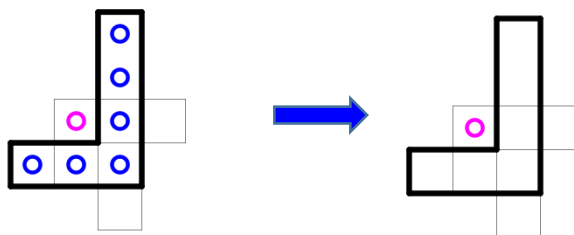
- ✓ Insieme del tipo 2: blocco rettangolare 3x2 con l'uso di quattro caselle esterne



- ✓ Insieme del tipo 3: blocco a "L" con l'uso di due caselle esterne



- ✓ Insieme del tipo 4: blocco a "L" con l'uso di tre caselle esterne



Una delle soluzioni che si possono ottenere usando questi insiemi base è quella rappresentata nella figura 3.12.

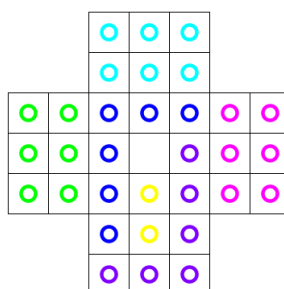


Figura 3.12

Dopo il movimento iniziale delle pedine gialle (29-17), il primo blocco a venir svuotato è il blocco rettangolare verde che usa come catalizzatore la pedina nella posizione 23 (tipo 1 dopo aver effettuato una simmetria rispetto all'asse orizzontale), successivamente il blocco a "L" viola che usa come catalizzatore la pedina nella posizione 26 (tipo 3), in seguito si svuoterà il blocco rettangolare azzurro con catalizzatore la pedina nella posizione 11 (tipo 1, rotazione di 90 gradi in senso orario), a questo punto verrà svuotato il blocco rettangolare fuxia con catalizzatore di nuovo la pedina nella posizione 11 (tipo 2 dopo aver effettuato una simmetria rispetto all'asse verticale), per svuotare infine il blocco a "L" blu con catalizzatore la pedina nella posizione centrale, ovvero la 17 (tipo 4 dopo una rotazione di 180 gradi intorno al catalizzatore). La soluzione finale sarà quindi:

29-17, 22-24, 8-22, 21-23, 7-21, 24-22, 21-23, 26-24, 33-25, 31-33, 18-30, 33-25, 24-26, 6-18, 4-6, 3-11, 1-3, 18-6, 3-11, 27-25, 20-18, 18-6, 13-11, 6-18, 25-11, 17-15, 28-16, 16-4, 11-9, 4-16, 15-17

Ci sono altri modi di suddividere il tavolo da gioco, con differenti tipi di insieme base, delle forme più svariate, un modo curioso di usare i blocchi a "L" è quello rappresentato nella figura 3.13.

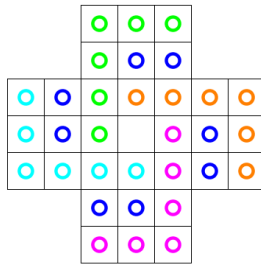


Figura 3.13

La soluzione consiste nel risolvere successivamente i blocchi a "L", simili a quelli del tipo 4 (in quella proposta l'ordine di risoluzione è: verde, azzurro, fuxia e arancione), per poi proseguire, dalla configurazione che rimane (Figura 3.14), con una serie di mosse effettuate con la stessa pedina (la rossa nella figura 4.15) e infine terminare con poche mosse la configurazione a "T" ci resta sul tavolo da gioco dopo i movimenti (figura 3.16).

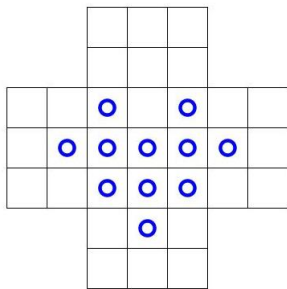


Figura 3.14

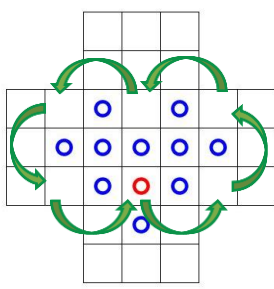


Figura 3.15

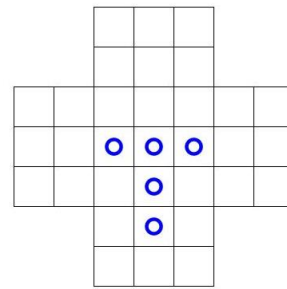


Figura 3.16

La soluzione sarà: 5-17, 8-10, 1-9, 3-1, 16-4, 1-9, 28-16, 21-23, 7-21, 24-22, 21-23, 26-24, 33-25, 31-33, 18-30, 33-25, 6-18, 13-11, 27-13, 10-12, 13-11, 24-26, 26-12, 12-10, 10-8, 8-22, 22-24, 17-15, 29-17, 18-16, 15-17

- *Sperimentare ed estrarre modelli (regolarità), induzione:*

Consiste nel cominciare da configurazioni particolari minime e cercare di trovare una regola comune che permetta di arrivare a una soluzione dei casi particolari, per poi cercare di generalizzare il procedimento a configurazioni con più elementi. Per esempio si può cercare di risolvere configurazioni a croce,

partendo da un minimo di elementi in modo da riuscire ad arrivare alla soluzione, e successivamente aggiungere pedine fino ad arrivare alla grandezza del solitario. Analizzando i casi più semplici cercare di trovare una soluzione comune che possa essere generalizzata.

- *Tentativi ed errori:*

Consiste, come già spiegato nel primo capitolo di questo lavoro, nel fare una prova e vedere se con questa si riesce ad arrivare alla soluzione, se non funziona si fa un tentativo diverso. Questa strategia non è consigliabile per questo gioco, in quanto i movimenti possibili di tutte le pedine sono moltissimi e si rischia di impiegare un tempo spropositato per riuscire a raggiungere una soluzione.

3.1.5. Varianti

L'obiettivo

Cambiando l'obiettivo del gioco però rimanendo sempre sullo stesso tavolo di gioco e con le stesse regole per i movimenti delle pedine, si possono ottenere delle varianti interessanti del solitario, che permettono di aguzzare l'ingegno essendo a volte più difficili della soluzione classica. Ci sono moltissime configurazioni che si possono raggiungere, a partire semplicemente dal variare la posizione finale dell'ultima pedina all'interno del tavolo di gioco. Sta alla fantasia del giocatore inventarne di nuove; qui ne presentiamo alcune possibili (Figura 3.17).

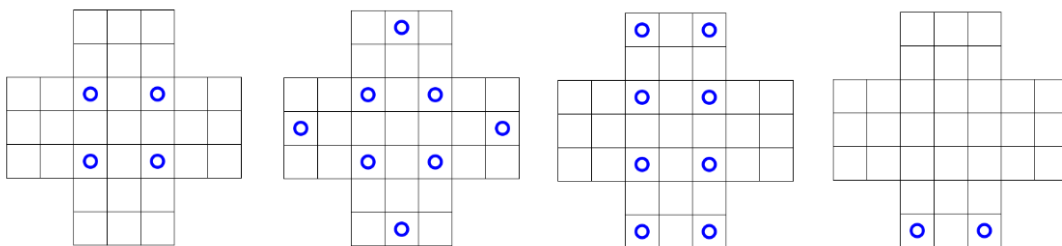


Figura 3.17

Le regole del gioco

Cambiando leggermente le regole si ottiene un gioco completamente diverso usando però, gli stessi materiali. Si possono, per esempio, variare le possibilità di movimento delle pedine aggiungendo la possibilità di spostamento in diagonale, mantenendo sempre la stessa “tecnica di salto”. Oppure si può aggiungere una nuova regola e “fissare” una pedina che non può essere mossa fino alla fine della partita, specificando che dovrà essere l’ultima a essere eliminata dal gioco oppure l’ultima a rimanere sul tavolo, quindi l’ultima mossa.

Il foro iniziale

Altra variante possibile per questo gioco è mantenere invariati regole del gioco e obiettivo ma, cambiare la disposizione iniziale delle pedine, lasciando quindi un foro vuoto in una posizione diversa dal foro centrale. L’obiettivo di questa variante potrebbe essere riuscire a terminare con l’ultima pedina proprio nella posizione lasciata vuota in partenza.

Configurazioni iniziali

Anche le diverse configurazioni iniziali, che abbiamo proposto parlando della strategia che consiste nel risolvere un problema più semplice, possono essere considerate varianti del gioco. In questo caso quindi, mantenendo fisse le regole del gioco e l’obiettivo, si cambia la configurazione iniziale e si riduce il numero di pedine per ottenere una variante del solitario.

3.1.6 Giochi analoghi

Solitario Francese

Esistono molti altri tavoli da gioco che utilizzano regole uguali o molto simili a quelle del Solitario della Bastiglia ma, sono di forme differenti. Uno dei più famosi è quello

chiamato Solitario Francese dal quale sembra derivare quello inglese. Il suo tavolo da gioco è molto simile a quello inglese, ci sono 4 fori in più posti agli angoli della croce; si avrà quindi un totale di 37 fori.



Figura 3.18

Come nel Solitario Inglese i movimenti delle pedine possono avvenire solamente nelle due direzioni ortogonali sinistra-destra e alto-basso. Lo scopo è, anche in questo gioco, arrivare ad avere una unica pedina nella posizione centrale.

Come per il suo compagno inglese, anche per questo solitario, sono state proposte delle varianti all'obiettivo, le più famose sono due:

- Il professore e i suoi alunni

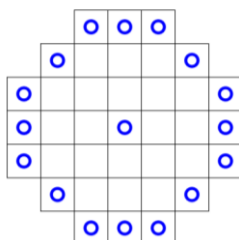


Figura 3.19

- La croce di Sant'Andrea

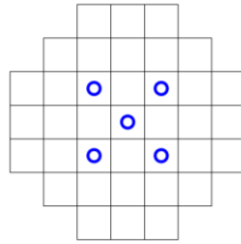


Figura 3.20

Solitario Tedesco (Solitario di Wiegleb)



Figura 3.21

Il tavolo da gioco di questo solitario è una croce con bracci uguali e simmetrici; che si può ottenere partendo dal Solitario Inglese, aggiungendo una fila di posizioni al fondo di ogni braccio; il totale dei fori risulta quindi essere 45.

Anche questo solitario può essere risolto più facilmente decomponendo il tavolo da gioco in blocchi.

Solitario a Croce Asimmetrica

Possiamo considerare come generalizzazione del formato di tavolo da gioco quello dei solitari a croce asimmetrica, la caratteristica di questi solitari è che i bracci della croce, formati sempre da posizioni allineate 3 a 3, non hanno la stessa lunghezza.

Solitario Quadrato

Dipende dalle dimensioni del quadrato la possibilità o meno di avere soluzione per qualunque posizione di partenza all'interno del tavolo da gioco.

Il solitario con 64 fori, che ha quindi un lato formato da 8 posizioni, ha soluzione solo se il foro vuoto di partenza si trova in una delle posizioni segnate nella figura 3.22, ogni altra posizione di partenza non porta a soluzione (ovvero un'unica pedina sul tavolo).

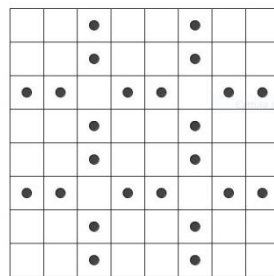


Figura 3.22

Invece quello con 81 fori, ovvero di formato 9x9, ha soluzione per qualunque posizione di partenza. L'unico tavolo fisico in cui è possibile giocare a questo solitario è la scacchiera del gioco del Go.

Solitario a Diamante



Figura 3.23

Il più famoso, chiamato anche il Solitario Continentale, ha un tavolo da gioco composto da 41 fori. Le regole e l'obiettivo del gioco sono sempre gli stessi ma, la complessità del gioco sta nella forma del tavolo in quanto ci sono ben 16 posizioni ad angolo, nel suo

libro Beasley, per raggiungere la soluzione, usa delle decomposizioni in blocchi, più complesse di quelle presentate per il solitario inglese.

Esistono altre versioni della stessa forma ma, con un numero diverso di fori e altre ancora, in cui il tavolo da gioco viene modificato eliminando delle posizioni, semplificando così notevolmente il gioco.

Kralenspiel



Figura 3.24

Questo solitario dalle origini incerte, tedesche o svizzere, ha una forma particolare composta da 41 posizioni. Caratteristico è il tavolo da gioco che non ha pedine removibili ma, sfere bicolore che vengono ruotate, cambiandone il colore, per indicare se la posizione è vuota o no.

Solitario Triangolare

Il Solitario Triangolare ha un tavolo da gioco a forma di triangolo equilatero, con il lato composto da 5 posizioni, per un totale di 15 fori.

La peculiarità di questo solitario è il fatto che, i movimenti delle pedine non possano avvenire in senso verticale ma, oltre al movimento orizzontale, le pedine possono muoversi in obliquo passando così, da una riga all'altra.

Questo solitario verrà analizzato dettagliatamente nel prossimo paragrafo.

Altre forme

Esistono anche solitari con forme molto particolari, un esempio caratteristico è il *Solitario a Stella*: il tavolo da gioco è una stella a 5 punte formata da 10 fori, uno per ogni vertice e uno per ogni intersezione dei lati.



Figura 3.25

Le regole del gioco sono le stesse, i movimenti si possono fare lungo i lati della stella e l'obiettivo è rimanere con un'unica pedina.

3.2. SOLITARIO TRIANGOLARE

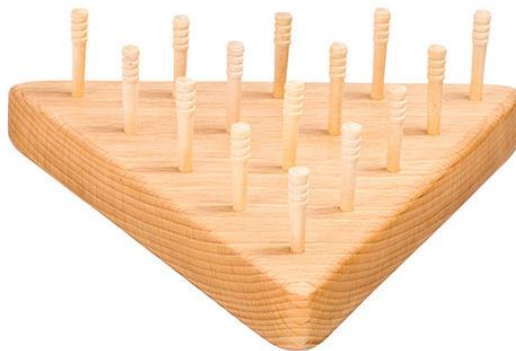


Figura 3.26

3.2.1. Tavolo da gioco e pedine

Il campo da gioco del più conosciuto Solitario Triangolare in commercio, consiste in un triangolo equilatero con 5 posizioni per lato formato da caselle, fori o depressioni, allineati con i lati, per un totale di 15 posizioni.

Le pedine, a seconda di come sono le posizioni del tavolo da gioco potranno essere di forma rotonda per adattarsi alle depressioni, a forma di piolo per incastrarsi nei fori o semplici se si tratta di caselle.

3.2.2. Storia

L'origine di questo solitario è sconosciuta. Il primo riferimento conosciuto è di un brevetto statunitense del 1891 per il solitario a elica con 16 fori. Questo brevetto, non menziona direttamente il Solitario Triangolare ma, è la prima conoscenza scritta di un solitario giocato su una forma triangolare. Una delle prime menzioni, invece, del Solitario Triangolare è in un opuscolo del 1932 intitolato *Puzzle Craft*, di Lynn Rohrbough edizioni.

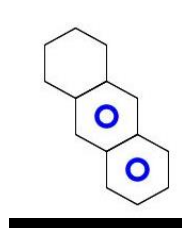
3.2.3. Regole

Inizialmente le pedine sono collocate in tutte le posizioni del tavolo di gioco eccetto una. L'obiettivo è, mediante una serie di movimenti, eliminare tutte le pedine eccetto una che dovrà rimanere nella posizione che era vuota all'inizio.

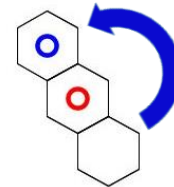
Il movimento base delle pedine è il "salto" descritto per il Solitario della Bastiglia. Questo movimento si può fare in direzione orizzontale e in direzione obliqua, non essendoci qui la possibilità di muovere in verticale, data la forma del tavolo da gioco. Quindi i sensi in cui si potranno muovere le pedine sono: sinistra-destra, basso destra-alto sinistra e basso sinistra-alto destra. La pedina saltata si toglie dal tavolo di gioco.

Il movimento sinistra-destra è già stato schematizzato per il Solitario Inglese, ora vediamo il movimento basso destra-alto sinistra, come esempio di movimento obliquo:

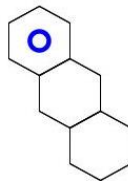
1. Posizione di partenza:



2. Salto della pedina più in basso nel foro vuoto:
(si elimina la pedina nella posizione rossa)



3. Posizione finale:



Le pedine del Solitario Triangolare sono 15, quindi l'obiettivo è eliminarne 14 e lasciare l'ultima pedina nella posizione voluta, per esempio questa:

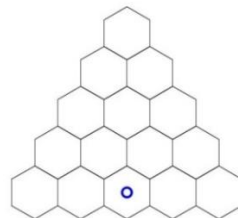


Figura 3.27

3.2.4. Analisi dei movimenti e delle strategie

Iniziamo l'analisi di questo gioco, analogamente all'analisi del Solitario Inglese, proponendo un tipo di notazione che possiamo considerare adeguata. Ci sono diversi modi per associare una notazione alle caselle del gioco, ognuno sceglie quello che trova più chiaro, diamo due esempi:

- Usare una notazione cartesiana e quindi dare a ogni diagonale una lettera e a ogni riga un numero, come in un piano cartesiano con l'asse verticale ruotato di 30° in senso orario intorno all'origine, così che la notazione risulti:

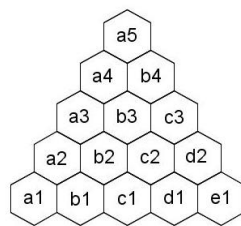


Figura 3.28

Per esempio il movimento, dalla prima casella in alto alla casella a metà del lato sulla destra, lo indicheremo: a5-c3

- Iniziare dalla prima casella in alto e, procedendo come nella scrittura, passare alla riga successiva continuando verso destra, numerando le caselle progressivamente:

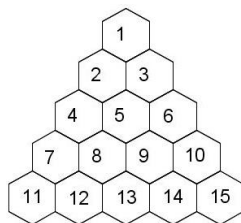


Figura 3.29

Per esempio il movimento, dalla prima casella in alto alla casella a metà del lato sulla destra, lo indicheremo: 1-6

Per la nostra analisi utilizzeremo questa seconda notazione.

I movimenti possibili delle pedine all'interno del tavolo da gioco si possono schematizzare in due modi diversi:

- Studiando ogni posizione quanti movimenti può fare:

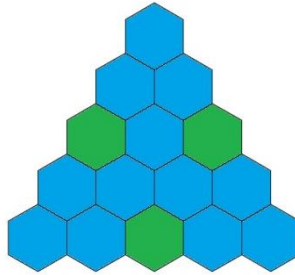


Figura 3.30

Le pedine situate nell'area blu possono muoversi in due direzioni. Le pedine nell'area verde possono muoversi invece in quattro direzioni.

- Studiando le possibili posizioni di ogni pedina:

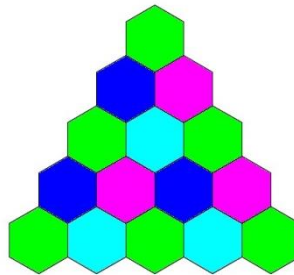


Figura 3.31

Le pedine che all'inizio del gioco si troveranno in una posizione di un certo colore, durante il gioco potranno muoversi solamente all'interno delle posizioni con lo stesso colore.

Altra osservazione utile è che il tavolo da gioco ha tre assi di simmetria: l'asse verticale e i due assi obliqui. Questo ci permette di dire che qualunque soluzione troviamo, ci saranno 5 soluzioni simmetriche ad essa.

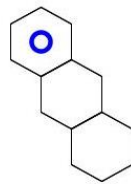
Le strategie di risoluzione che si possono usare sono molteplici, importante anche qui è non giocare in modo aleatorio:

- *Partire dalla fine, supporre il problema risolto (uso del ragionamento regressivo):*

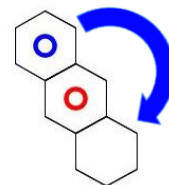
Consiste nell'iniziare con una unica pedina in quella che decidiamo essere la posizione di arrivo e riempire man mano il tavolo da gioco usando le regole al

rovescio, ovvero: la pedina può fare il movimento se ha accanto due fori vuoti consecutivi, la pedina “salta” nel foro più lontano e un’altra pedina viene posizionata nel foro a metà. Le pedine possono muoversi sempre nelle tre direzioni possibili: sinistra-destra, basso destra-alto sinistra e basso sinistra-alto destra.

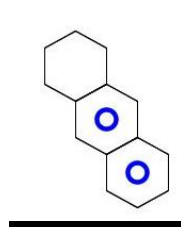
Per esempio un movimento alto sinistra-basso destra (ovvero l’inverso di basso destra-alto sinistra con le regole originali) può venire schematizzato così:



1. Posizione di partenza:



2. Salto della pedina più in basso nel foro vuoto:
(si elimina la pedina nella posizione rossa)



3. Posizione finale:

Quindi riempiendo il tavolo da gioco si vanno ad individuare delle posizioni, delle figure che possiamo chiamare vincenti; nel senso che partendo da quella figura e procedendo secondo le regole, si può arrivare alla soluzione del gioco.

- *Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice:*

Consiste nell’iniziare con alcune configurazioni più semplici, ovvero con meno pedine sul tavolo da gioco, usando sempre le regole originali del gioco.

- *Decomporre il problema in problemi più piccoli, semplificare:*

Consiste nel cercare di scomporre il tavolo da gioco in parti, usando anche la simmetria del gioco, per poi risolvere parte per parte fino ad arrivare alla soluzione.

- *Sperimentare ed estrarre modelli (regolarità), induzione:*

Consiste nel cominciare da configurazioni particolari minime e cercare di trovare una regola comune che permetta di arrivare a una soluzione dei casi particolari per poi cercare di generalizzare il procedimento a configurazioni con più elementi. Per esempio si può cercare di risolvere configurazioni più piccole, partendo da un minimo di elementi sempre in forma triangolare, e successivamente aggiungere pedine fino ad arrivare alla grandezza del solitario. Analizzando i casi più semplici cercare di trovare una soluzione comune che possa essere generalizzata.

- *Tentativi ed errori:*

Consiste, come già spiegato nel primo capitolo di questo lavoro, nel fare una prova e vedere se con questa si riesce ad arrivare alla soluzione, se non funziona si fa un tentativo diverso. Questa strategia non è consigliabile per questo gioco, in quanto i movimenti possibili di tutte le pedine sono moltissimi e si rischia di impiegare un tempo spropositato per riuscire a raggiungere una soluzione.

È impossibile in questo gioco raggiungere l'obiettivo di terminare con l'ultima pedina nel foro vuoto della configurazione di partenza quando, il foro vuoto, è in una delle tre posizioni al centro del triangolo.

3.2.5. Varianti

L'obiettivo

Cambiando l'obiettivo del gioco però rimanendo sempre sullo stesso tavolo di gioco e con le stesse regole per i movimenti delle pedine, si possono ottenere delle varianti

interessanti del solitario, che permettono di aguzzare l'ingegno essendo a volte più difficili della soluzione classica. Ci sono moltissime configurazioni che si possono raggiungere, a partire semplicemente dal variare la posizione finale dell'ultima pedina all'interno del tavolo di gioco, sta alla fantasia del giocatore inventarne di nuove.

Le regole del gioco

Usando gli stessi materiali e cambiando leggermente le regole si ottiene un gioco completamente diverso. Si può, per esempio, aggiungere una nuova regola e "fissare" una pedina che non può essere mossa fino alla fine della partita, specificando che dovrà essere l'ultima a essere eliminata dal gioco oppure l'ultima a rimanere sul tavolo, quindi l'ultima mossa.

Il foro iniziale

Altra variante possibile per questo gioco è mantenere invariati le regole del gioco e l'obiettivo ma cambiare la disposizione iniziale delle pedine, lasciando quindi un foro vuoto in una posizione diversa dal foro centrale. L'obiettivo di questa variante potrebbe essere riuscire a terminare con l'ultima pedina proprio nella posizione lasciata vuota in partenza.

Configurazioni iniziali

Mantenendo fisse le regole del gioco e l'obiettivo, si può cambiare la configurazione iniziale riducendo il numero di pedine per ottenere una variante del solitario. Per esempio lasciando liberi due fori al posto di uno e cercando di terminare con due pedine in quelle posizioni.

3.2.6. Giochi Analoghi

Solitario Triangolare Troncato

Il Solitario Troncato deriva dal Solitario Triangolare eliminando i vertici del triangolo, si ottiene quindi un tavolo da gioco con 12 fori in cui le pedine, seguendo le regole del solitario triangolare, si possono fare i soliti tre movimenti.



Figura 3.32

Questo solitario, al contrario del triangolare, giocato con le stesse regole e con lo stesso obiettivo, ha soluzione per tutte le posizioni del tavolo da gioco.

Esistono versioni di questo solitario troncato con un numero diverso di posizioni, per esempio questa versione con 25 fori, un triangolo troncato di 7 fori per lato.



Figura 3.33

Solitario Triangolare con un numero differente di fori

Ci sono diverse versioni del Solitario Triangolare in cui si mantiene la forma e si cambia solamente il numero di posizioni all'interno del tavolo da gioco. Non tutte le versioni hanno soluzione per qualsiasi posizione di partenza, per esempio il solitario con 21 fori, ovvero che ha 6 fori per lato ha soluzione per ogni posizione.



Figura 3.33

Solitario Esagonale

Questo solitario di forma esagonale regolare viene giocato con le stesse regole del Solitario Triangolare, infatti, come forma, permette i movimenti in orizzontale e in diagonale.



Figura 3.34

Esistono anche qui delle varianti con più fori, ogni Solitario Esagonale ha soluzione per tutte le posizioni, se e solo se, il suo diametro è multiplo di 3, ovvero se n è il numero

di fori sul lato dell'esagono, n dovrà essere della forma $n = 3i + 2$ perchè il gioco abbia soluzione per ogni posizione.

Solitario a Stella



Figura 3.35

Questo solitario si ottiene aggiungendo a un Solitario Esagonale 6 triangoli equilateri che hanno come base i lati dell'esagono. Anche questa versione ha soluzione per tutte le posizioni se dato n il numero di fori sul lato dell'esagono, n è della forma $n=3i+2$

Solitario Romboideale (Solitario a diamante)

Questo solitario si può giocare con le regole del Solitario Triangolare, ha soluzione per ogni posizione solamente se il numero di fori sul lato del rombo è multiplo di 3.

Altre forme

Il più antico solitario con reticolo triangolare conosciuto è il *Solitario a Elica*, brevettato per la prima volta nel 1891, ha 16 fori disposti a elica: il foro centrale è il vertice di tre triangoli equilateri con lato 3 fori, disposti come in un'elica, con l'asse ruotato di 120° .

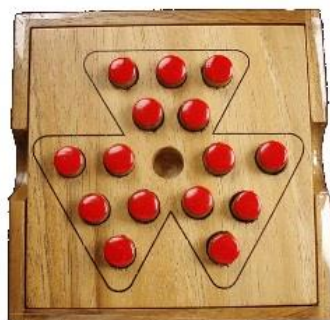


Figura 3.36

3.3. CHE MATEMATICA STA ALLA BASE DEI DUE SOLITARI ANALIZZATI?

Come possiamo sapere se un tavolo da gioco permette di risolvere il solitario partendo con un unico foro vuoto e terminando con una pedina in quella stessa posizione?

Attraverso l'analisi matematica è possibile determinare la "realizzabilità" di un solitario, ovvero se considerando due configurazioni è possibile passare da una all'altra con una serie di movimenti validi.

Nel *Compte-Rendu de Travaux de L'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon (Années 1841-1842)* troviamo un rapporto dettagliato di *M. Vallot* sul lavoro fatto da *M. Suremain de Missery*, anziano ufficiale del corpo reale d'artiglieria e membro non ufficiale dell'*Académie*, intitolato *Théorie générale du jeu de Solitaire, considéré comme problème d'analyse et de situation*. Questo è il più antico lavoro scritto sull'analisi matematica dei solitari e tratta del Solitario della Bastiglia. Come abbiamo visto, già Leibniz si interessò al gioco ma, purtroppo non pubblicò nessuna delle sue ricerche che andarono perdute. La parte più interessante all'interno di questo lavoro è quella che Vallot chiama semplicemente "*la loi du jeu*":

"Su una stessa linea di caselle, orizzontale o verticale, si può, a due pedine consecutive che si sopprimono, sostituire a destra o a sinistra, in alto o in basso, nella terza casella consecutiva, un'unica pedina diversa dalle precedenti e che, per l'effetto di una convenzione, viene visualizzata come *equivalente* alle altre due pedine."

Continua affermando che l'autore, ovvero Suremain de Missery, la rappresenta in un modo analitico usando questa notazione:

$$(y + 1) + (y + 2) = (y + 3)$$

Quindi indicando la pedina $(y + 3)$ equivalente alle due $(y + 1)$ e $(y + 2)$ "di modo che il segno '=' e il segno '+' si trovano applicati a delle *situazioni* piuttosto che a delle *quantità*, e a dei numeri *ordinali* piuttosto che a dei numeri *cardinali*".

Continua il rapporto enunciando i principi derivanti da questa legge:

(Per comodità al posto che usare la notazione di Vallot useremo le prime lettere dell'alfabeto così che *la loi de jeu* diventa $a + b = c$)

Primo principio: $a + b = c$ (è la legge del gioco)

Secondo principio: $c = a + b$ (l'inverso del primo)

Terzo principio: $a = a + 3i$ con i intero (ovvero ogni tre caselle ce n'è una equivalente)

Quarto principio: $a + 3i = a$ (l'inverso del terzo)

Quinto principio: $a + c = b$

Sesto principio: $b = a + c$ (l'inverso del quinto)

Vediamo ora come il ragionamento di Suremain de Missery può essere espresso più chiaramente usando i gruppi abeliani, e può essere usato come strumento per valutare la realizzabilità del gioco.

Una notazione cartesiana possibile per il tavolo da gioco è associare una coppia di numeri interi, usando lo stesso criterio dell'esempio (Figura 3.5). Quindi il tavolo da gioco può essere visto come un sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^2 .

Consideriamo il Solitario della Bastiglia, il tavolo da gioco è rappresentato dall'insieme:

$$B = \{(i, j): 3 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 7\} \cup \{(i, j): 1 \leq i \leq 7, 3 \leq j \leq 5\} \text{ con } i, j \in \mathbb{Z}$$

Nel Solitario Triangolare invece, come abbiamo visto, la rappresentazione cartesiana del tavolo da gioco può essere fatta utilizzando, al posto dell'asse verticale, un asse inclinato di 30° rispetto al primo. Per analizzare matematicamente il solitario modifichiamo il tavolo da gioco e allineiamo tutte le posizioni verso sinistra, in questo modo:

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15

Figura 3.36

Avremo quindi il tavolo da gioco rappresentato da questo insieme:

$$T = \{(i, j) : j \leq -i + 6 \text{ con } 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5\} \text{ con } i, j \in \mathbb{Z}$$

Una *Configurazione* sul tavolo da gioco sarà quindi rappresentata da un vettore $C \in \{0,1\}^B \mathbb{Z}^B$ (rispettivamente da un vettore $C \in \{0,1\}^T \mathbb{Z}^T$ per il solitario triangolare): le componenti nulle del vettore corrisponderanno alle caselle vuote sul tavolo da gioco, mentre le componenti unitarie corrisponderanno alle caselle in cui è presente una pedina.

La *Configurazione Complementare* di C , \bar{C} , ovvero quella configurazione dove le caselle in cui era presente una pedina in C ora sono vuote e viceversa, viene definita come $\bar{C} := \mathbb{1} - C$ dove $\mathbb{1}$ indica la configurazione in cui, ogni casella del tavolo da gioco contiene una pedina.

Associato a ogni posizione (i, j) del tavolo da gioco esiste un vettore unitario appartenente a \mathbb{Z}^B (rispettivamente a \mathbb{Z}^T), chiamato e_{ij} che rappresenta la particolare configurazione in cui sul tavolo da gioco c'è un'unica pedina nella posizione (i, j) ; chiamiamo e_{ij} *Vettore Posizione*.

Ogni *movimento* m_{ij} del gioco quindi può essere rappresentato da una combinazione lineare di tre vettori posizione in cui il coefficiente dei due vettori che rappresentano le caselle in cui si elimina la pedina è -1, mentre quello che rappresenta la casella che prima del movimento era vuota e dopo il movimento contiene una pedina è 1. Per esempio il movimento destra-sinistra avrà la forma: $m_{ij} = e_{i-1,j} - e_{i,j} - e_{i+1,j}$.

A questo punto possiamo formalizzare la definizione di *realizzabilità*.

Definizione:

Una coppia (C, C') di configurazioni sul tavolo da gioco B (o T) è *realizzabile* se esiste una sequenza finita $m_{ij}^1, m_{ij}^2, \dots, m_{ij}^k \in \mathbb{Z}^B$ (o \mathbb{Z}^T) tale che:

- $C' = C + \sum_{l=1}^k m_{ij}^l$
- $C + \sum_{l=1}^k m_{ij}^l \in \{0,1\}^B$ (o $\{0,1\}^T$)

Sia dato $G := \{a, b, c, e\}$ gruppo Abeliano con l'identità e e le seguenti tavole di addizione:

- $a + a = b + b = c + c = e$
- $a + b = c$
- $a + c = b$
- $b + c = a$

Definiamo quindi le seguenti mappe per il caso del Solitario della Bastiglia:

$$g_1(i, j): \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{G}$$

$$g_1(i, j) := \begin{cases} a & \text{se } (i + j) \equiv 0 \pmod{3} \\ b & \text{se } (i + j) \equiv 1 \pmod{3} \\ c & \text{se } (i + j) \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Configurazione per $g_1(i, j)$:

		b	c	a		
		a	b	c		
a	b	c	a	b	c	a
c	a	b	c	a	b	c
b	c	a	b	c	a	b
		c	a	b		
		b	c	a		

Figura 3.37

$$g_2(i,j): \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{G}$$

$$g_2(i,j) := \begin{cases} a & \text{se } (i-j) \equiv 0 \pmod{3} \\ b & \text{se } (i-j) \equiv 1 \pmod{3} \\ c & \text{se } (i-j) \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Configurazione per $g_2(i,j)$:

		c	a	b		
		a	b	c		
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
		b	c	a		
		c	a	b		

Figura 3.38

Definiamo quindi, per il Solitario della Bastiglia, la funzione φ che chiameremo *funzione punteggio*:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbf{Z}^2 &\longrightarrow \mathbf{G}^2 \\ e_{ij} &\longrightarrow (g_1(i,j), g_2(i,j)) \end{aligned}$$

Allora avremo:

$$\varphi(C) = \sum_{i,j \in B} c_{ij}(g_1(i,j), g_2(i,j))$$

Dove c_{ij} sono le componenti di C al variare di i e j all'interno del tavolo da gioco.

Diremo che una configurazione ha *punteggio nullo* se $\varphi(C) = (e, e)$.

Chiamando C_0 la configurazione iniziale del Solitario della Bastiglia e utilizzando la tabella di addizione dei gruppi abeliani, avremo che la funzione punteggio di C_0 è:

$$\begin{aligned}
\varphi(C_0) &= 1 * (b, c) + 1 * (c, a) + \dots + 1 * (b, c) + 0 * (c, a) + 1 * (a, b) + \dots + 1 \\
&\quad * (c, a) + 1 * (a, b) \\
&= (b + c + \dots + b + 0 + a + \dots + c + a, c + a + \dots + c + 0 + b + \dots \\
&\quad + a + b) = (c, a)
\end{aligned}$$

Mentre la funzione punteggio della configurazione complementare a C_0 invece è:

$$\begin{aligned}
\varphi(\overline{C_0}) &= 0 * (b, c) + 0 * (c, a) + \dots + 0 * (b, c) + 1 * (c, a) + 0 * (a, b) + \dots + 0 \\
&\quad * (c, a) + 0 * (a, b) \\
&= (0 + \dots + 0 + c + 0 + \dots + 0, 0 + \dots + 0 + a + 0 + \dots + 0) = (c, a)
\end{aligned}$$

Nel caso del Solitario Triangolare, essendo il tavolo da gioco differente, e in particolare non potendo muovere le pedine in verticale ma, potendole muovere in obliquo, si dovranno fare delle modifiche e l'unica mappa sarà questa:

$$h(i, j): \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{G}$$

$$h(i, j) := \begin{cases} a & \text{se } (i - j) \equiv 0 \pmod{3} \\ b & \text{se } (i - j) \equiv 1 \pmod{3} \\ c & \text{se } (i - j) \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Ottenendo la configurazione per il solitario:

c					
a	b				
b	c	a			
c	a	b	c		
a	b	c	a	b	

Figura 3.39

Definiamo quindi, per il Solitario Triangolare, la funzione ϑ che chiameremo *funzione punteggio*:

$$\begin{aligned}
\vartheta: \mathbf{Z}^2 &\longrightarrow \mathbf{G} \\
e_{ij} &\longrightarrow h(i, j)
\end{aligned}$$

Allora avremo:

$$\vartheta(C) = \sum_{i,j \in B} c_{ij} h(i,j)$$

Dove c_{ij} sono le componenti di C al variare di i e j all'interno del tavolo da gioco.

Diremo che una configurazione ha *punteggio nullo* se $\vartheta(C) = e$.

Chiamando C_5 la configurazione iniziale con un foro vuoto nella posizione 5 e utilizzando la tabella di addizione dei gruppi abeliani, avremo che la funzione punteggio di C_5 è:

$$\begin{aligned} \vartheta(C_5) &= 1 * c + 1 * a + 1 * b + 1 * b + 0 * c + 1 * a + 1 * c + 1 * a + 1 * b + 1 * c \\ &\quad + 1 * a + 1 * b + 1 * c + 1 * a + 1 * b = \\ &= c + a + b + b + 0 + a + c + a + b + c + a + b + c + a + b = a + b = c \end{aligned}$$

Mentre la funzione punteggio della configurazione complementare a C_5 è invece:

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{C_5}) &= 0 * c + 0 * a + 0 * b + 0 * b + 1 * c + 0 * a + 0 * c + 0 * a + 0 * b + 0 * c \\ &\quad + 0 * a + 0 * b + 0 * c + 0 * a + 0 * b = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + c + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = c \end{aligned}$$

A questo punto possiamo definire quindi il *punteggio del tavolo da gioco*:

$$\begin{aligned} \varphi(B) &:= \varphi(\mathbb{1}) = \sum_{i,j \in B} \varphi(e_{ij}) = \sum_{i,j \in B} (g_1(i,j), g_2(i,j)) \\ \vartheta(B) &:= \vartheta(\mathbb{1}) = \sum_{i,j \in B} \vartheta(e_{ij}) = \sum_{i,j \in B} h(i,j) \end{aligned}$$

Si noti che $\varphi(B) = \varphi(C) + \varphi(\overline{C})$ e $\vartheta(B) = \vartheta(C) + \vartheta(\overline{C})$ per qualsiasi configurazione C .

Per esempio nel caso del Solitario della Bastiglia

$$\varphi(B) = \varphi(C_0) + \varphi(\overline{C_0}) = (c, a) + (c, a) = (e, e)$$

Mentre in quello triangolare

$$\vartheta(B) = \vartheta(C_5) + \vartheta(\overline{C_5}) = c + c = e$$

Ovvero il punteggio del tavolo da gioco in questi due casi risulta nullo.

Osserviamo: il punteggio di ogni movimento valido m_{ij} è nullo.

Illustriamolo tramite un esempio: consideriamo il movimento destra-sinistra nel Solitario della Bastiglia

$$\varphi(m_{ij}) = \varphi(e_{i-1,j}) - \varphi(e_{i,j}) - \varphi(e_{i+1,j}) = (e, e)$$

in quanto sia la prima che la seconda componente dei punteggi dei tre vettori posizione, sono una a , una b e una c , essendo i tre vettori posizione consecutivi. Quindi le configurazioni possibili per le due componenti sono:

$$a - b - c = a - (b + c) = a - a = e$$

$$b - c - a = b - (c + a) = b - b = e$$

$$c - a - b = c - (a + b) = c - c = e$$

Da queste osservazioni ricaviamo la *Regola del Tre*, ovvero la condizione necessaria per la realizzabilità del solitario.

Proposizione (la Regola del Tre):

Una condizione necessaria affinché una coppia di configurazioni (C, C') sia realizzabile è che

$$\varphi(C - C') = (e, e)$$

o analogamente che

$$\vartheta(C - C') = e$$

Usando questo risultato è possibile verificare che le possibili soluzioni del Solitario della Bastiglia, partendo con il foro vuoto nella posizione centrale e terminando con un'unica pedina sul tavolo da gioco sono: la posizione 17, ovvero quella centrale, la posizione 2 e le sue 3 posizioni simmetriche, la 14, la 20 e la 32. Per il Solitario

Triangolare invece, le soluzioni possibili partendo con il foro vuoto in posizione 5 sono: la stessa posizione 5, la posizione 1, ovvero il vertice in alto del triangolo, le due posizioni simmetriche 7 e 10, e la posizione centrale sul lato che fa da base del triangolo, cioè la posizione 13.

Conseguenza diretta della Regola del Tre è la condizione necessaria per la realizzabilità dell'intero tavolo da gioco, ovvero la condizione necessaria affinché ci sia la possibilità di, data una configurazione, arrivare, tramite movimenti validi, alla sua complementare.

Proposizione:

Una condizione necessaria affinché una coppia di configurazioni complementari (C, \bar{C}) sia realizzabile è che il punteggio del tavolo da gioco sia nullo, ovvero:

$$\varphi(B) = (e, e)$$

$$\vartheta(B) = e$$

Dimostrazione:

Dalla Regola del Tre per il Solitario della Bastiglia si ha che la condizione di realizzabilità per la coppia (C, \bar{C}) è

$$\varphi(C - \bar{C}) = (e, e) \text{ ovvero } \varphi(C) = \varphi(\bar{C}).$$

$$\varphi(B) = \varphi(C) + \varphi(\bar{C}) \text{ per qualsiasi configurazione } C.$$

Dalle due osservazioni si ottiene che:

$$\varphi(B) = \varphi(C) + \varphi(\bar{C}) = \varphi(C) + \varphi(C) = (e, e).$$

Analogamente si può fare la stessa dimostrazione per il Solitario Triangolare.

□

Questa proposizione è molto utile per capire se si ha la possibilità di avere una soluzione partendo con un foro vuoto in qualsiasi punto del tavolo da gioco e terminando con l'ultima pedina nello stesso punto.

Purtroppo non si è ancora trovata una condizione sufficiente per la realizzabilità di una coppia di configurazioni, questo porta ad avere tavoli da gioco con punteggio nullo ma, in cui alcune coppie di configurazioni non sono realizzabili, un esempio è il caso del solitario triangolare in cui la configurazione di partenza con il foro vuoto nelle posizioni 5, 8, e 9 non ha soluzione volendo arrivare alla configurazione complementare.

CAPITOLO 4

ANALISI DEI QUESTIONARI ATTITUDINALI

Prima dell'inizio della sperimentazione, ovvero prima dello svolgimento dei due problemi, abbiamo proposto al gruppo di studenti oggetto della sperimentazione tre questionari attitudinali, principalmente per valutare la loro opinione come potenziali futuri docenti, sull'uso dei giochi nella didattica. I tre questionari erano strutturati in modo simile. La prima parte, comune a tutti, era composta da una serie di domande per caratterizzare l'individuo e il suo grado di formazione: età, sesso, Grado studiato e anno di corso frequentato. Nella seconda parte, il corpo centrale, ogni questionario presentava invece dei quesiti con caratteristiche differenti. Il primo questionario riguardava i giochi, in particolare quelli di strategia, il secondo l'uso dei giochi all'interno di una lezione di matematica e il terzo aveva come obiettivo quello di permettere agli alunni di riflettere sui loro processi di pensiero tracciando un autoritratto euristico.

Dall'analisi dei suddetti questionari si sono potuti tracciare alcuni profili e alcune categorie di cui fanno parte gli studenti intervistati.

4.1. PRIMO QUESTIONARIO: ESPERIENZA NEI GIOCHI

Il primo questionario riguardava l'esperienza e l'interesse degli studenti nei giochi. I quesiti posti vertevano sull'interesse per i giochi da tavola, e per qualsiasi tipo di videogioco on-line o su piattaforma, sulla frequenza della loro pratica e sulla conoscenza dei giochi di strategia.

Quesiti questionario 1: Esperienza nei giochi.

1. Hai esperienza con i giochi?
2. Quale è il tuo grado di interesse per i giochi con carta e matita e per i giochi da tavola?
3. Quale è il tuo grado di interesse per i giochi sul computer?
4. Quale è il numero di giochi che pratichi?
5. Quanto tempo hai trascorso giocando ai videogiochi il mese scorso?
6. Quanto tempo hai trascorso giocando a giochi on-line il mese scorso?
7. Definisci che cos'è per te un gioco di strategia.
8. Conosci qualche gioco di strategia?
9. Nel caso che tu ne conosca, cita tre giochi di strategia adeguati per la scuola secondaria.

Le domande 1. e 8. erano domande con risposta obbligata Si/No.

Le domande 2. e 3. erano domande a risposta multipla le cui opzioni erano:

- Non interessato in assoluto.
- Poco interessato.
- Né interessato né non interessato.
- Interessato.
- Molto interessato.

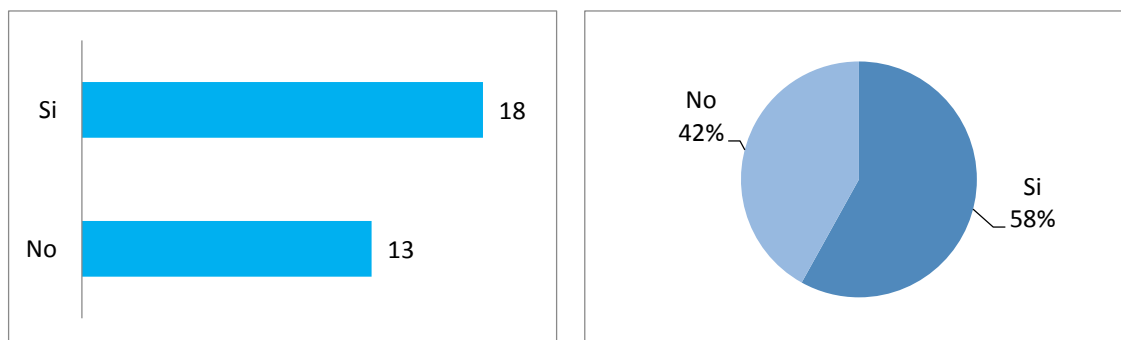
Le domande 5. e 6. Erano, anch'esse, domande a risposta multipla le cui opzioni erano:

- 0 ore.
- Meno di 5 ore.
- Da 5 a 10 ore.
- Più di 10 ore.

Le altre domande erano a risposta aperta.

Gli alunni totali della classe erano 32, di cui 31 hanno risposto al questionario e questi sono i risultati.

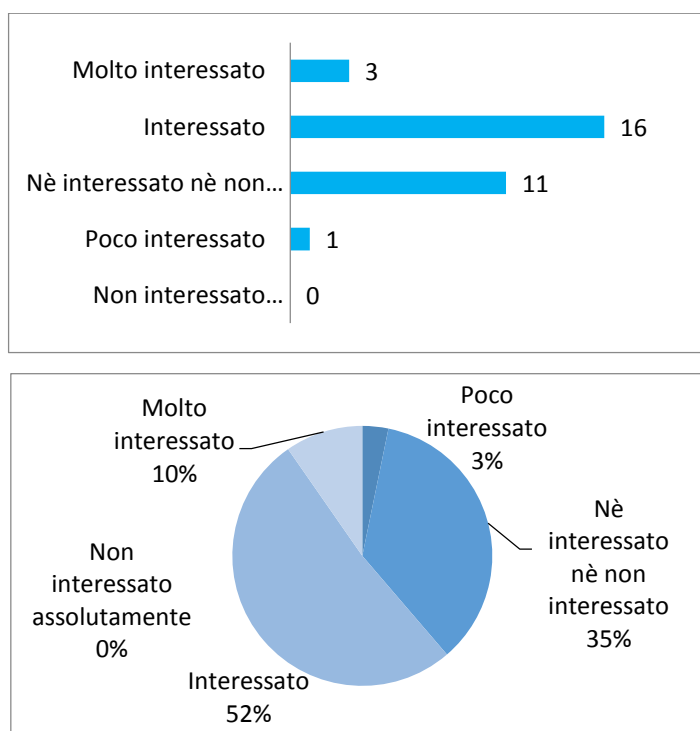
1. Esperienza con i giochi



Grafici 4.1

18 studenti hanno risposto che hanno esperienza con i giochi e 13 che non ce l'hanno. Quindi il 58% ha risposto affermativamente mentre il restante 42% negativamente.

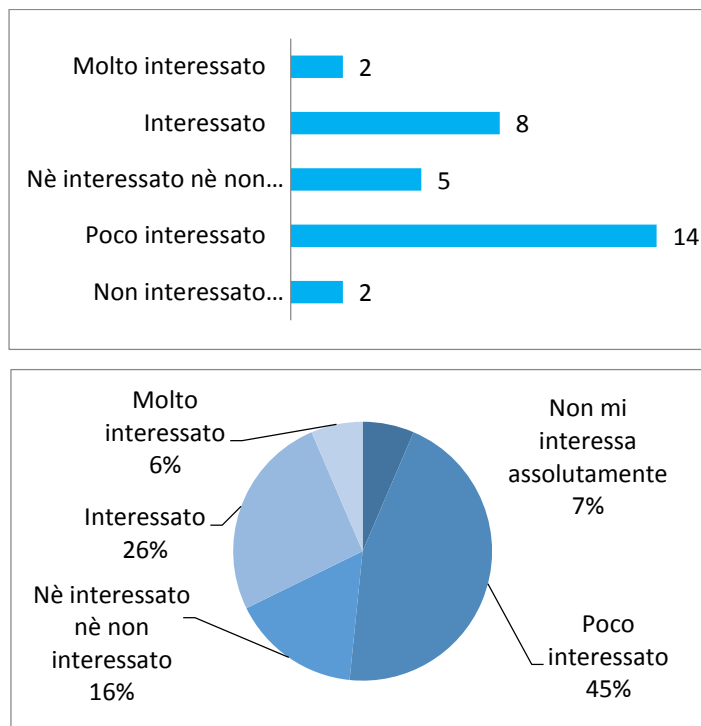
2. Interesse per i giochi con carta e matita e per i giochi da tavola



Grafici 4.2

3 studenti hanno risposto che hanno molto interesse per i giochi da tavola (10%), 16 che sono interessati (52%), 11 che non sono né interessati né disinteressati (35%); uno solamente ha risposto che è poco interessato (3%) e non c'è nessuno a cui non interessano.

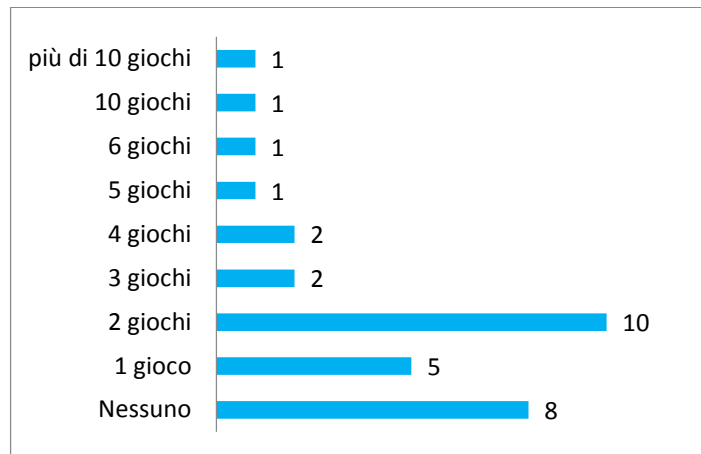
3. Interesse per i giochi al Personal Computer



Grafici 4.3

2 studenti hanno risposto che hanno molto interesse per i giochi da tavola (6%), 8 che sono interessati (26%), 5 che non sono né interessati né disinteressati (16%), 14 che sono poco interessati (45%) e 2 che non sono assolutamente interessati (7%).

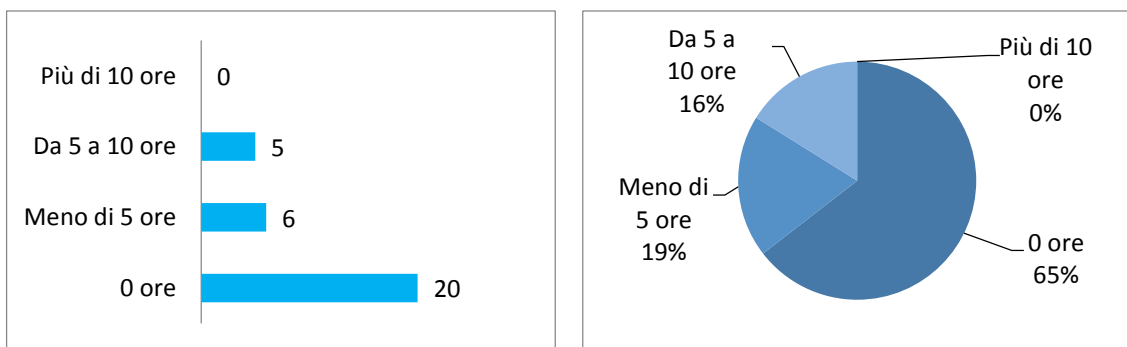
4. Numero di giochi praticati



Grafici 4.4

8 studenti hanno risposto che non praticano nessun gioco, 5 studenti che ne praticano uno solo, 10 studenti che ne praticano due, 2 studenti che ne praticano tre, altri 2 che ne praticano quattro e quattro studenti che praticano ognuno cinque, sei, dieci e più di dieci giochi.

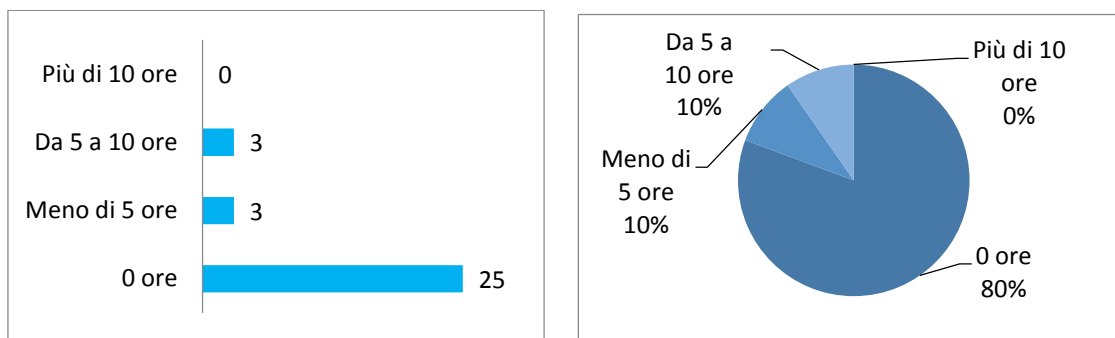
5. Tempo trascorso giocando ai videogiochi il mese scorso



Grafici 4.5

20 studenti hanno risposto che non hanno giocato nell'ultimo mese (65%), 6 studenti che hanno giocato meno di 5 ore (19%) e 5 studenti che hanno giocato dalle 5 alle 10 ore (16%).

6. Tempo trascorso giocando a giochi on-line il mese scorso



Grafici 4.6

25 studenti hanno risposto che non hanno giocato nell'ultimo mese (80%), 3 studenti che hanno giocato meno di 5 ore (10%) e 3 studenti che hanno giocato dalle 5 alle 10 ore (10%).

7. Definizione di gioco di strategia

In generale tutti gli studenti hanno risposto correttamente, ma non esaustivamente alla definizione di gioco di strategia.

Tra le caratteristiche fondamentali del gioco hanno elencato:

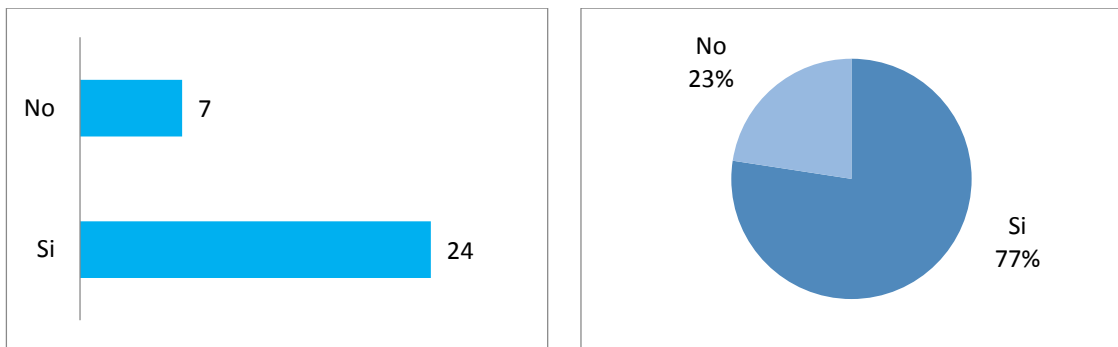
- Rispettare le regole date.
- Prevedere le reazioni dell'avversario (8 studenti).
- Contrastare il gioco dell'avversario.
- Avere la necessità di allearsi.
- Disegnare un piano o una strategia (15 studenti).
- Sviluppare la strategia (4 studenti).
- Analizzare i procedimenti fatti.

Queste sono altre caratteristiche emerse dalle definizioni:

- Il gioco non si sviluppa in modo lineare.
- Nel gioco non interviene l'aleatorietà (3 studenti).
- La riuscita del gioco dipende da un algoritmo (2 studenti).
- Il gioco richiede certe conoscenze matematiche.
- Nel gioco è necessario prendersi un tempo per pensare (3 studenti).
- Il gioco richiede l'uso di abilità personali (3 studenti).
- Il gioco richiede l'uso della logica.

- Si deve giocare con intelligenza (7 studenti).
- E' necessario avere pazienza.
- Bisogna essere in grado di prendere decisioni (2 studenti).
- Il gioco è una sfida personale.

8. Conosci qualche gioco di strategia?



Grafici 4.7

24 studenti hanno risposto che conoscono dei giochi di strategia (77%), mentre 7 studenti hanno risposto che non ne conoscono (23%).

9. Cita tre giochi di strategia adeguati per la scuola secondaria

Tutti gli studenti hanno risposto nominando almeno un gioco di strategia:

- Battaglia navale,
- Calcio,
- Cubo di Rubik,
- Cubo Soma,
- Dama (2 studenti),
- Dilemma del prigioniero,
- Domino (2 studenti),
- Giochi con l'abaco,
- Giochi d'azzardo con le carte (2 studenti),
- Giochi di carte collezionabili (Magic the gathering),
- Go,
- I Coloni di Catan,
- La torre di Hanoi (3 studenti),
- Mastermind,
- Monopoli (2 studenti),
- Mus, gioco di carte popolare in spagna,
- Nim,

- Ogame,
- Parchis (2 studenti),
- Pocha, gioco di carte spagnolo simile alla Briscola,
- Poker (3 studenti),
- Risico (2 studenti),
- Rompicapo delle 8 regine,
- Scacchi (16 studenti),
- Solitario della Bastiglia,
- Sudoku (5 studenti),
- Triominos,
- Tris (3 studenti),
- Tute, gioco di carte spagnolo simile alla Briscola.

Osservazioni sui primo questionario

Possiamo notare dall'osservazione delle risposte date al questionario proposto che, in generale, gli alunni hanno dimostrato un medio interesse nei confronti dei giochi. Una percentuale abbastanza alta, il 62%, è interessata ai giochi da tavola mentre per i giochi al computer scende fino al 32%, con un 52% di studenti non interessati. Per quanto riguarda il numero di giochi praticati possiamo raggruppare le risposte in tre fasce:

- Quelli che non praticano giochi.
- Quelli che ne praticano pochi (1-2).
- Quelli che ne praticano abbastanza (3 o più).

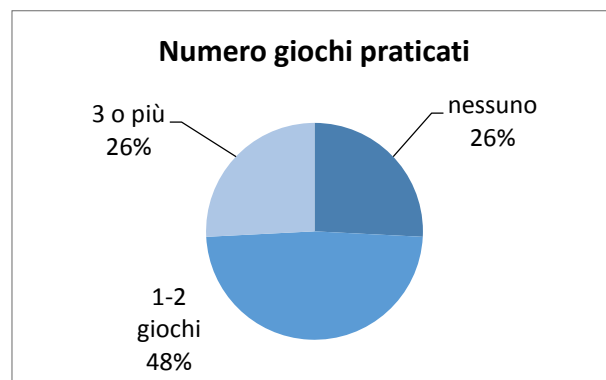


Grafico 4.8

Anche qui possiamo notare che la maggior parte degli studenti pratica pochi giochi (48%) mentre il 26% non ne pratica per niente. Per quanto riguarda invece il tempo passato a giocare con i videogiochi e con i giochi on-line, visto il poco interesse per i giochi al computer, le percentuali di studenti che non giocano affatto sono molto alte (65% per i videogiochi e 80% per i giochi on-line) mentre nessuno gioca più di 10 ore al mese.

Per quanto riguarda la conoscenza dei giochi di strategia una buona percentuale (77%) dice di conoscerne, ed anche la letteratura specifica considera tali giochi, quasi tutti efficaci per gli studenti della scuola secondaria superiore ed inferiore.

4.2. SECONDO QUESTIONARIO: I GIOCHI E IL LORO USO NELLA DIDATTICA

Il secondo questionario riguardava l'uso dei giochi nella lezione di matematica. I quesiti vertevano sull'opinione che gli studenti hanno dei giochi, su cosa pensano dell'uso dei giochi all'interno della lezione di matematica e sull'analogia tra giochi di strategia e risoluzione dei problemi.

Quesiti questionario 2: I giochi e il loro uso nella didattica.

1. Elenca tre matematici che hanno lavorato con i giochi o che si riferiscono a questi nei loro scritti.
2. "Mai gli uomini sono stati più ingegnosi che nell'invenzione dei giochi." Conosci l'autore di questa citazione? Esprimi una tua opinione.
3. Sei d'accordo con l'uso dei giochi nella lezione di matematica?
4. Che giochi pensi sarebbero adeguati per studenti della scuola secondaria superiore ed inferiore?
5. Dove pensi che i giochi sarebbero più utili nella lezione di matematica?
6. Hai pensato, qualche volta, alla relazione tra risoluzione dei problemi e giochi di strategia? Elenca tre aspetti comuni.

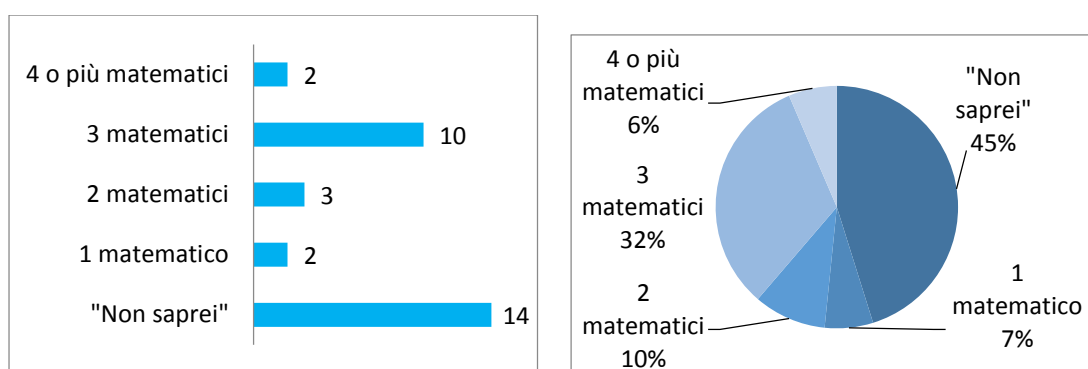
La domanda 3. era una domanda a risposta multipla le cui risposte possibili erano:

- Totalmente in disaccordo.
- In disaccordo.
- Né d'accordo né in disaccordo.
- D'accordo.
- Totalmente d'accordo.

Le altre domande erano a risposta aperta.

Gli alunni totali della classe erano 32, di cui 31 hanno risposto al questionario e questi sono i risultati.

1. Elenca tre matematici che hanno lavorato con i giochi o che si riferiscono a questi nei loro scritti



Grafici 4.9

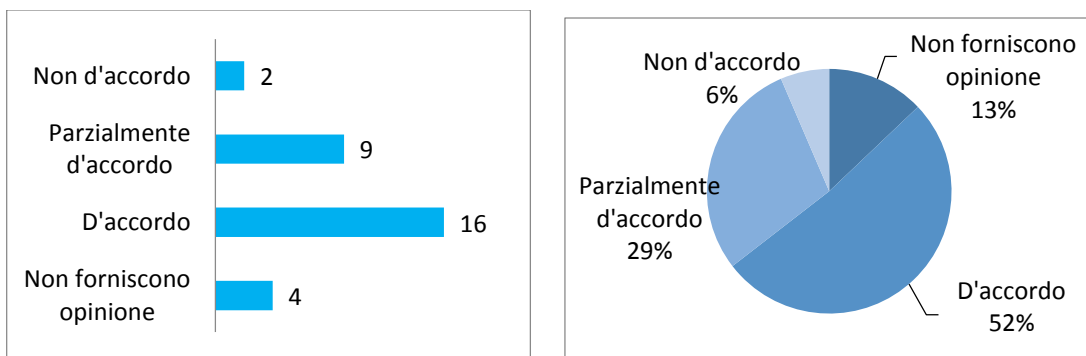
Alla prima domanda ben 14 studenti hanno risposto che non sapevano quali matematici lavorarono con i giochi (45%), 2 ne hanno nominato uno (6%), 3 due (10%), 10 tre (32%) e 2 quattro o più (6%). I matematici nominati sono stati questi:

- Archimede.
- Robert Aumann, vincitore del premio Nobel per l'economia nel 2005 per *“avere accresciuto la nostra comprensione del conflitto e della cooperazione attraverso l'analisi della teoria dei giochi”*, premio condiviso con Thomas Schelling.
- Johann Bernoulli.
- Lewis Carrol.
- Antoine Augustin Cournot.
- Miguel De Guzmán (8 studenti).

- Leonhard Euler.
- Pierre de Fermat.
- Martin Gardner.
- Richard Garfield.
- Carl Friedrich Gauss.
- Gottfried Leibniz (2 studenti).
- Edouard Lucas.
- John Forbes Nash (8 studenti).
- John von Neumann (5 studenti).
- Adrián Paenza.
- Blaise Pascal (3 studenti).
- Erno Rubik, architetto e scultore creatore di uno studio per la progettazione di mobili e giochi dopo il successo della rivista da lui fondata “... *És játék*” (“... e giochi”) e dell’omonimo Cubo.
- Thomas Schelling, economista statunitense che, come detto, condivise il premio Nobel per l’economia nel 2005, il suo libro più famoso è *The Strategy of Conflict*, del 1960.
- Reinhard Selten, economista, insieme a John Harsanyi e John Nash ha vinto il premio Nobel per l'economia nel 1994 per “*l’analisi pionieristica degli equilibri nella teoria dei giochi non cooperativi*”.
- Albert W. Tucker (4 studenti).
- James Waldegrave, ambasciatore e nobile inglese che scrisse in una lettera del 1713 la prima esposizione sulla teoria dei giochi.

**2. “Mai gli uomini sono stati più ingegnosi che nell’invenzione dei giochi.”
Conosci l’autore di questa citazione? Esprimi una tua opinione.**

La quasi totalità degli studenti non conosceva l’autore di questa citazione eccetto uno.

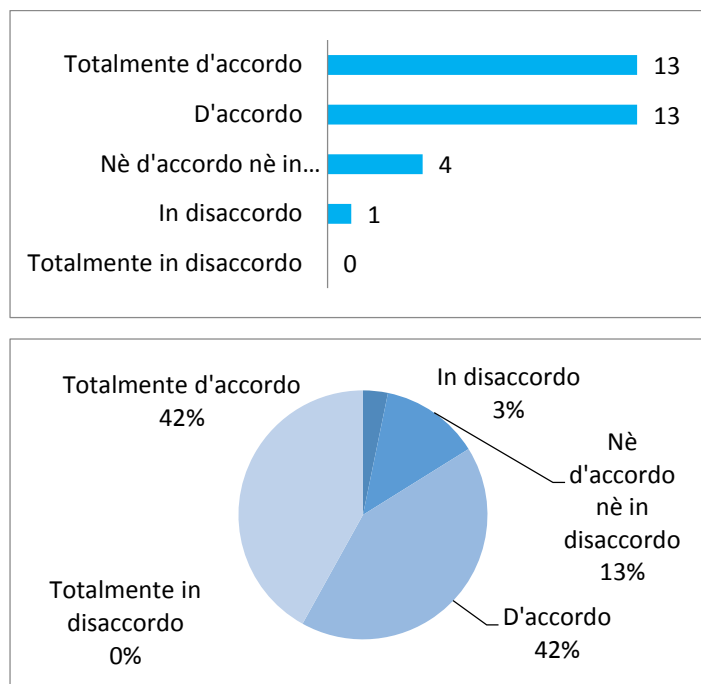


Grafici 4.10

Dall'analisi delle risposte possiamo osservare che:

- 16 studenti sono d'accordo con la citazione (52%);
- 9 sono parzialmente d'accordo (29%) in particolare perché ritengono che ci siano altri ambiti, per esempio le tecnologie, dove l'essere umano è stato ed è tuttora più ingegnoso;
- 2 non sono d'accordo (6%), uno perché ritiene che i giochi abbiano delle origini semplici e l'altro perché ritiene che la creazione dei giochi abbia portato allo sviluppo di malattie legate al loro abuso;
- 4 non hanno fornito alcuna opinione.

3. Sei d'accordo con l'uso dei giochi nella lezione di matematica?



Grafici 4.11

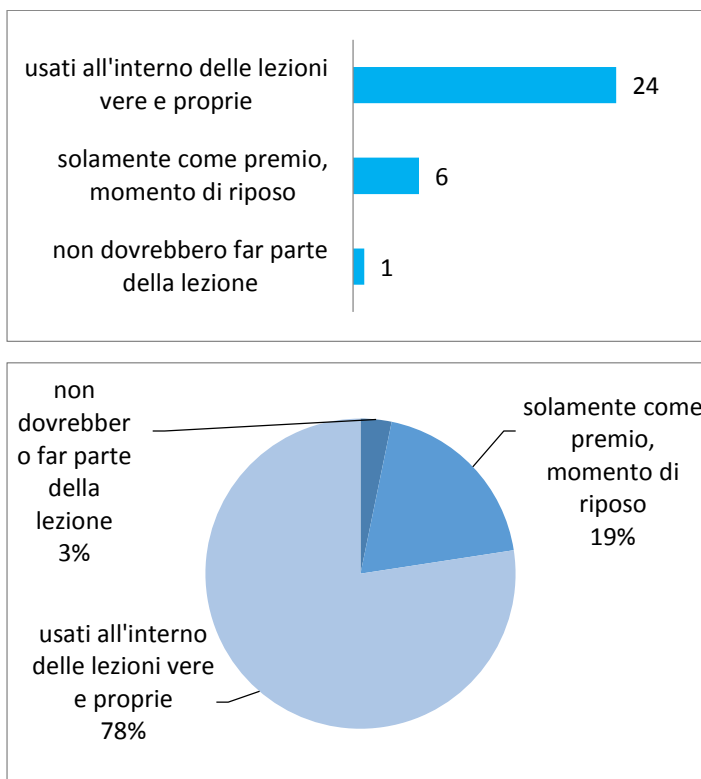
13 studenti hanno risposto che sono totalmente d'accordo con l'uso dei giochi nella lezione di matematica (42%), altri 13 che sono d'accordo (42%), 4 che non sono né d'accordo né in disaccordo (13%), e solamente uno che non è d'accordo (3%).

4. Che giochi pensi sarebbero adeguati per studenti della scuola secondaria superiore ed inferiore

- 2 studenti (6,6%) hanno risposto che non avevano nessuna idea di giochi che si potevano usare in una classe.
- 5 studenti (16%) hanno nominato genericamente i giochi di strategia.
- 5 studenti (16%) hanno nominato genericamente i giochi di logica.
- 3 studenti (10%) hanno nominato genericamente i giochi di geometria.
- 1 studente (3%) ha nominato genericamente i giochi di cooperazione.
- Gli altri alunni invece (circa il 48%) hanno elencato alcuni giochi specifici che si possono utilizzare nella classe:

Abaco, Battaglia navale, Carte (2 studenti), Circuiti, Cubo di Rubik, Dilemma del prigioniero (2 studenti), Domino, Giochi da tavola, Giochi d'azzardo (2 studenti), Indovinelli (3 studenti), Kakuro (2 studenti), Labirinti, "La lattuga, la capra e il lupo", Memory, Monete in cerchio, Nim, Origami, Quadrato magico (2 studenti), Sacchi con le palline per praticare la probabilità, Scacchi (4 studenti), Solitario della Bastiglia, Sudoku (2 studenti), Tangram (3 studenti), Torre di Hanoi (2 studenti), Tris, Trivial matematico, Uno.

5. Dove pensi che i giochi sarebbero più utili nella lezione di matematica?



Grafici 4.12

Dall'analisi delle risposte abbiamo ottenuto che:

- 24 studenti sono risultati in accordo con l'uso dei giochi all'interno delle lezioni di matematica (78%).
- 6 sono risultati in accordo sul loro utilizzo ma, solamente, come premio per gli studenti, come momento di riposo all'interno delle lezioni, come seminari separati dalle lezioni o usati didatticamente ma solamente nelle classi di appoggio; la maggior parte di questi studenti ne propone l'uso al di fuori dall'orario scolastico (19%).
- 1 studente non è risultato in accordo sull'uso dei giochi nella didattica della matematica (3%).

I suggerimenti riguardanti gli argomenti in cui usarli sono stati:

- Qualunque argomento (7 studenti).
- Argomenti più complicati.
- Aritmetica.

- Geometria (4 studenti).
- Probabilità e statistica (5 studenti).
- Teoria dei grafici.
- Risoluzione dei problemi (2 studenti).

Mentre quelli riguardanti il momento migliore per usarli sono stati:

- In accompagnamento delle spiegazioni (2 studenti).
- Alla fine di ogni grande argomento.
- Come riflessione sull'argomento studiato.
- Come metodo di valutazione.

Le motivazioni sul perché usare i giochi sono state:

- Migliorano il gusto e la visione per la materia.
- Migliorano l'interesse per la disciplina.
- Migliorano l'attenzione e la concentrazione degli studenti.
- Migliorano la capacità di fare dei ragionamenti.
- Sono una attività più divertente e motivante, che permette una visione aperta e positiva della matematica.
- E' un metodo con cui è più facile imparare (2 studenti).

6. Hai pensato, qualche volta, alla relazione tra risoluzione dei problemi e giochi di strategia? Elenca tre aspetti comuni

Solamente uno studente non ha risposto alla domanda.

Alcuni studenti hanno elencato delle strategie di risoluzione comuni che sono:

- Suddividere il problema,
- Cercare regolarità,
- Supporre il problema risolto (ragionamento regressivo),
- Cercare analogie con giochi/problemi conosciuti,
- Provare una strategia già conosciuta,
- Tentativi ed errori.

Tre studenti hanno affermato semplicemente che la struttura di risoluzione è la stessa (comprensione, pensare forme di risoluzione, applicarle, risolvere),

Gli altri studenti hanno elencato delle caratteristiche comuni, riguardanti la struttura della risoluzione, che sono:

- Analizzare il problema (4 studenti),
- Usare alcune regole che non si possono modificare,
- Pianificare i passi di risoluzione (13 studenti),
- Cercare strategie vincenti (17 studenti),
- Affrontare il problema,
- Vedere se la strategia porta alla soluzione e se non è così variare la strategia (2 studenti),
- Cercare di anticipare il risultato delle tue azioni,
- Analizzare quando una strategia è migliore di un'altra,
- Guardare indietro alla risoluzione per provare se il risultato è corretto (2 studenti),
- Verificare se esistono soluzioni differenti (2 studenti),
- Verificare se risolvere un problema è comparabile a con il vincere un gioco.

Hanno anche dato delle indicazioni su come si dovrebbero affrontare entrambi (problemi e giochi di strategia):

- Con attenzione,
- Con creatività (3 studenti),
- Con intelligenza (5 studenti),
- Con intenzione,
- Con perseveranza e senza arrendersi (2 studenti),
- Utilizzando conoscenze previe (3 studenti),
- Utilizzando abilità personali (4 studenti).

Altre caratteristiche comuni elencate dagli studenti sono state:

- La presenza di una grande soddisfazione finale (4 studenti)
- La presenza in entrambi di una forte relazione con la realtà (2 studenti).

Osservazioni sul secondo questionario

Possiamo notare dall'osservazione delle risposte date a questo questionario che, in generale, gli alunni hanno una visione molto positiva dei giochi (81%) e che concordano per il loro utilizzo nella didattica (84%). La maggior parte dei giochi proposti dagli

studenti sono di strategia e sono utilizzabili, nella loro totalità, come attività didattica. Gli studenti hanno, inoltre, una buona concezione dell'analogia che esiste tra giochi di strategia e risoluzione di problemi.

4.3. TERZO QUESTIONARIO: AUTORITRATTO EURISTICO

Il terzo questionario aveva come obiettivo quello di permettere agli studenti di riflettere sui propri processi di pensiero tracciando un autoritratto euristico, i quesiti riguardano le mete e gli obiettivi degli intervistati e gli aspetti cognitivi, esterni e affettivi che influenzano il loro studio.

Quesiti questionario 3: Autoritratto euristico

1. Mete e Obbiettivi

Riflettere su:

- Che mete o obbiettivi guidano o hanno guidato il mio apprendimento?
- Cosa orienta il mio studio attualmente?

2. Aspetti cognitivi

Riflettere su:

- Che tipo di materie, processi e compiti sono più prossimi al tuo modo di pensare?
- Hai curiosità per l'ignoto?
- Ti piace riflettere?
- Che tipo di ragionamento preferisci, il deduttivo o l'induttivo?
- Ti piace concentrarti in una cosa sola o diverse alla volta?
- Utilizzi immagini? Che tipo?
- Come utilizzi l'intuizione?
- Quanta e di che tipo di memoria disponi?

3. Aspetti affettivi

Riflettere su:

- Che tipo di sentimenti si producono all'affrontare un problema? Quali sono le emozioni più frequenti?
- Ti costa iniziare un compito?
- Hai alti-bassi nello sforzo o sei costante?
- Sei incline allo sconforto (o scoraggiamento meglio?) o sei tenace?

- Che tipo di compiti ti piacciono e quali no?
- Che tipo di sensazioni ti invadono quando usi immagini e rappresentazioni grafiche?
- Che tipo di sensazioni ti invadono quando usi un ragionamento algebrico o analitico?
- Che tipo di sensazioni ti invadono quando usi ragionamenti deduttivi?
- Che tipo di sensazioni ti invadono quando usi ragionamenti induttivi?
- Sei pasticciona o perfezionista?

4. Aspetti esterni

Riflettere su:

- In che momento e luogo preferisci lavorare?
- Cosa favorisce la tua concentrazione?
- Cos'è che ti distrae?
- In che circostanze è solita emergere l'ispirazione?
- Che postura fisica sei solito adottare?
- Di quante ore di riposo hai bisogno?

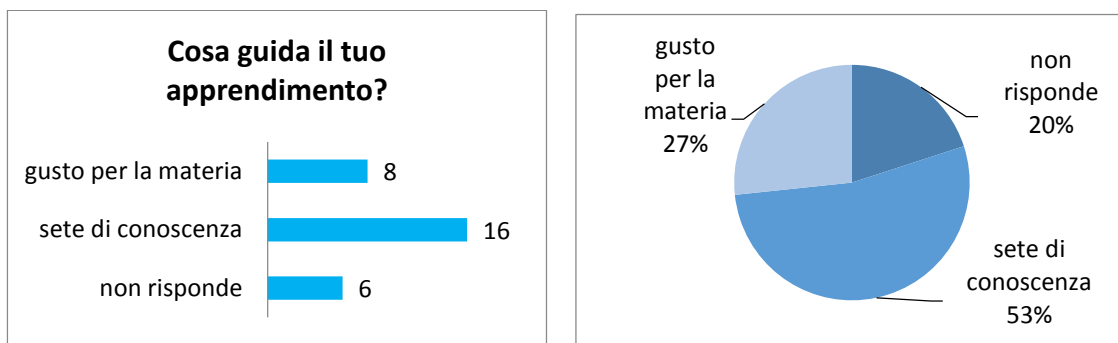
5. Quale di questi aspetti influisce di più nel tuo ritratto euristico?

Le domande erano tutte a risposta aperta.

Gli alunni totali della classe erano 32, di cui 30 hanno risposto al questionario e questi sono i risultati.

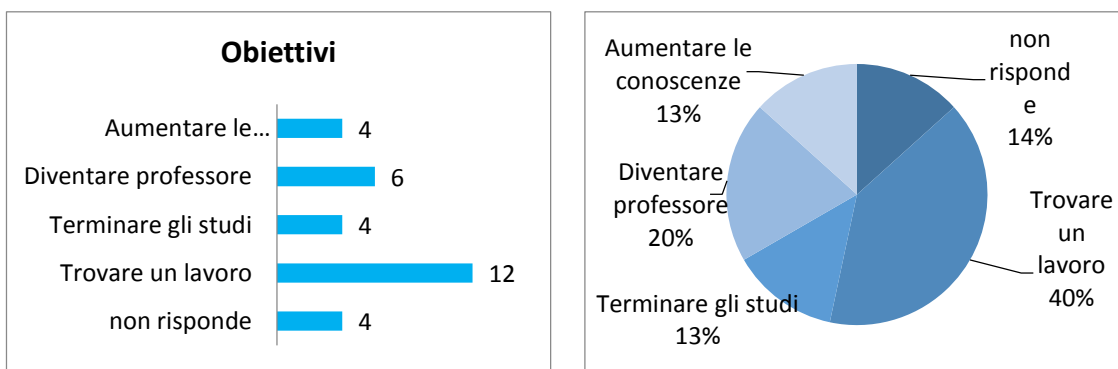
Essendo domande a risposta aperta leggendo e analizzando le risposte si è potuto estrarre da queste gli aspetti relativi alle varie sotto-domande proposte.

1. Mete e obiettivi



Grafici 4.13

8 studenti segnalano che quello che ha guidato le loro scelte nell'apprendimento è stato il gusto per la materia (27%), 16 la sete di conoscenza (53%) mentre nella risposta di 6 studenti non è menzionato cosa guida il loro apprendimento.



Grafici 4.14

4 studenti segnalano che il loro obiettivo è aumentare le conoscenze continuando a studiare (13%), 6 vorrebbero diventare professore (20%), 4 pensano solamente a terminare gli studi (13%), 12 hanno come obiettivo quello di trovare un lavoro soddisfacente (40%) mentre nella risposta di 4 studenti non è menzionato il loro obiettivo.

2. Aspetti cognitivi

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "che tipo di materie, processi e compiti sono più prossimi al tuo modo di pensare?".

Materie:

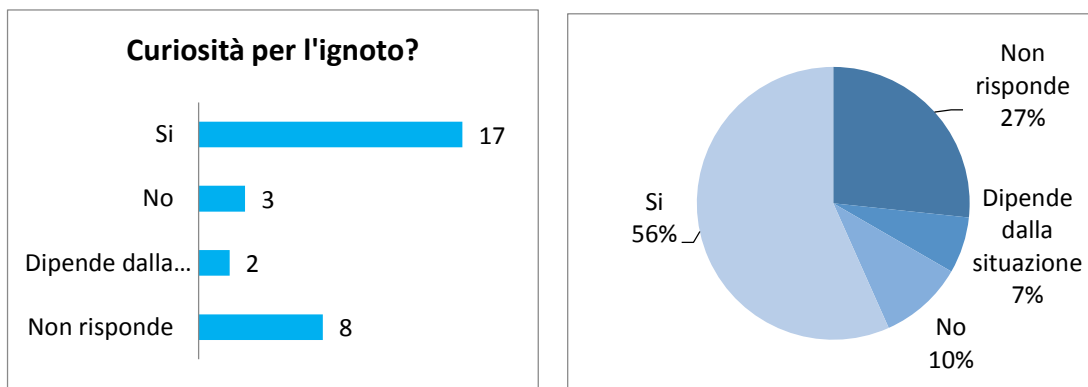
- Geometria euclidea (3 studenti)
- Geometria e topologia (2 studenti)
- Storia della matematica (2 studenti)
- Ricerca operativa

Processi:

- Ragionamento algebrico (4 studenti)
- Ragionamento logico (4 studenti)
- Procedimenti tipici del pensiero matematico (3 studenti)
- Ragionamento analitico (2 studenti)
- Ragionamento deduttivo (2 studenti)
- Ragionamento astratto
- Ragionamento numerico
- Ragionamento ordinato e formale
- Uno studente segnala che preferisce il ragionamento alla memorizzazione

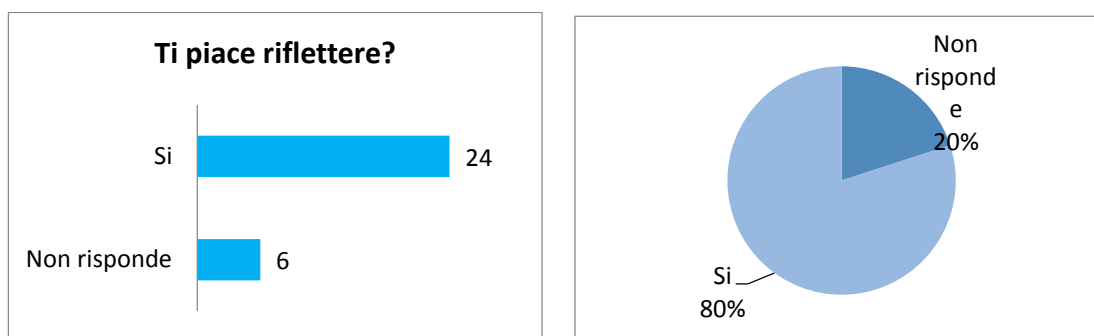
Compiti:

- Applicazioni (3 studenti)
- Modellizzazioni
- Problemi che facilitano la comprensione di un aspetto teorico e che pongono nuove questioni
- Processi meccanici
- Ottimizzazioni



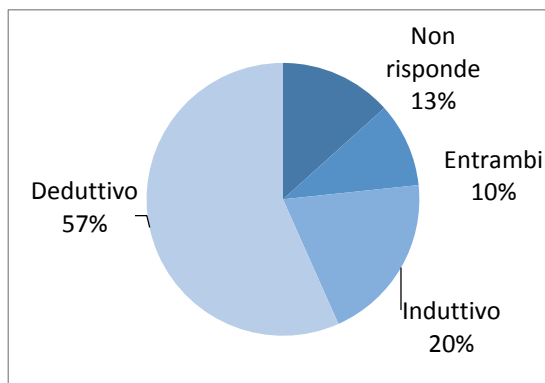
Grafici 4.15

17 studenti segnalano che hanno curiosità nei confronti di quello che non conoscono (56%), 3 rispondono che in generale non ce l'hanno (10%), 2 che dipende dalla situazione e da qual è la meta sconosciuta, se è qualcosa che attira l'attenzione hanno curiosità, altrimenti no, mentre nella risposta di 8 studenti non è presente se hanno curiosità o meno.



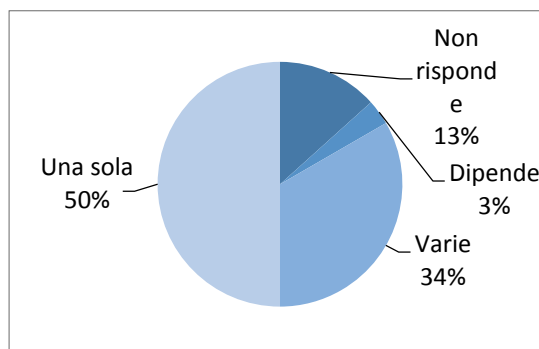
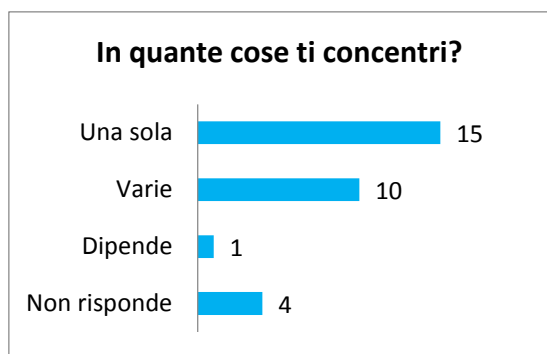
Grafici 4.16

24 studenti rispondono che gli piace riflettere (80%) mentre nella risposta degli altri studenti non è menzionato se piace riflettere.



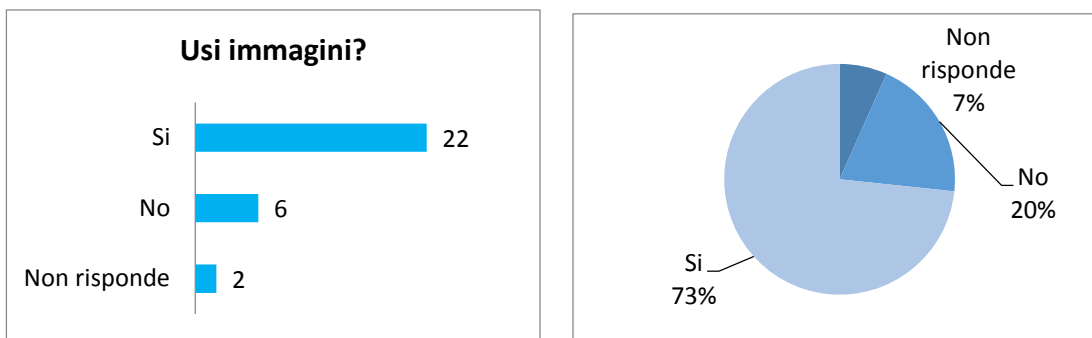
Grafici 4.17

17 studenti segnalano che quello che il tipo di ragionamento che preferiscono è quello deduttivo (57%), 6 che è quello induttivo (20%), 3 che li usano entrambi senza preferenze (10%) mentre nella risposta di 4 studenti non è menzionato quale ragionamento preferiscono.



Grafici 4. 17

15 studenti segnalano che sono soliti concentrarsi in una sola cosa alla volta (50%), 10 che preferiscono concentrarsi in diverse alla volta (34%), uno studente risponde che dipende dalla situazione (3%) mentre nella risposta di 4 studenti non è menzionato in quante cose sono soliti concentrarsi.

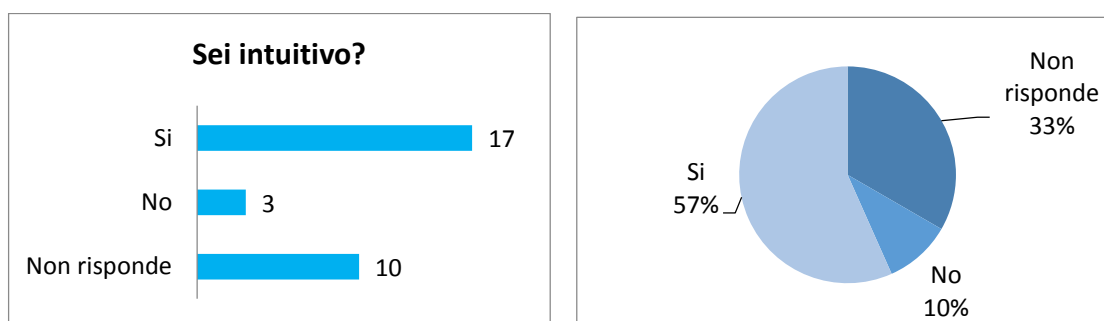


Grafici 4.18

22 studenti segnalano che sono soliti usare immagini (73%), 6 che non le usano (20%) mentre nella risposta di 2 studenti non è menzionato se le usano o meno.

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "che tipo di immagini utilizzi?".

- Schemi (4 studenti)
- Grafici (3 studenti)
- Immagini geometriche (3 studenti)
- Freccie



Grafici 4.19

17 studenti segnalano di farsi guidare dall'intuizione nei loro ragionamenti (57%), 3 che non sono soliti seguirla (10%) mentre nella risposta di 10 studenti non è menzionato se sono soliti seguire l'intuizione o meno.

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "quanta e di che tipo di memoria disponi?".

Quantità:

- Buona (8 studenti)
- Normale (5 studenti)
- Poca (3 studenti)

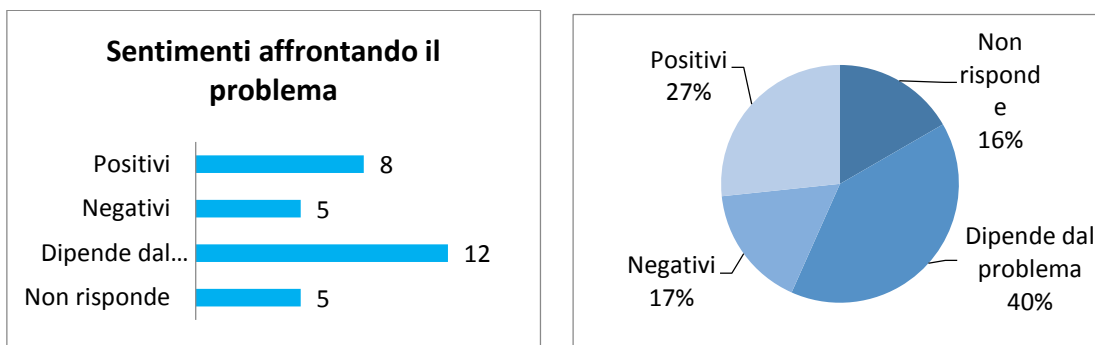
Qualità:

- A lungo termine (3 studenti)
- A breve termine (2 studenti)

Tipo di memoria:

- Fotografica (11 studenti)
- Selettiva (2 studenti)
- “Per ciò che posso comprendere”
- Per dati e formule
- Veloce
- “Memorizzo li piccoli dettagli per poi ricostruire cose più grandi”

3. Aspetti affettivi



Grafici 4.20

8 studenti dicono di avere sentimenti positivi affrontando il problema (27%), 5 invece dicono di averli negativi (17%), 12 che dipende dal tipo di problema provare sentimenti positivi o negativi mentre nella risposta di 5 studenti non sono menzionati i sentimenti prodotti al affrontare il problema.

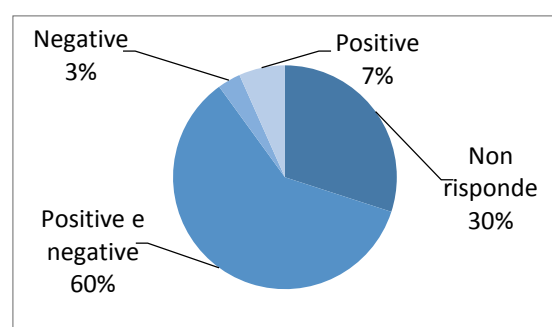
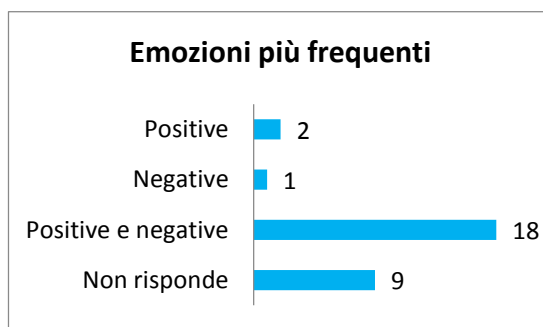
I sentimenti che vengono nominati dagli studenti sono:

Positivi:

- Allegrria
- Attrazione
- Curiosità (3 studenti)
- Emozionante (2 studenti)
- Piacere (2 studenti)
- Motivazione
- Rilassatezzazza
- Sfida (4 studenti)

Negativi:

- Affanno
- Dubbio
- Frustrazione (3 studenti)
- Illusione di semplicità
- Incertezza
- Insicurezza
- Nervosismo
- Noia
- Paura
- Perplexità
- Pigrizia
- Scoraggiamento



Grafici 4.21

2 studenti dicono di provare più frequentemente emozioni positive nella risoluzione del problema (7%), solamente uno studente invece prova più frequentemente emozioni negative (3%), 18 dice di provarne diverse, sia positive che negative (60%) mentre nella risposta di 9 studenti non sono menzionate le emozioni provate nella risoluzione del problema.

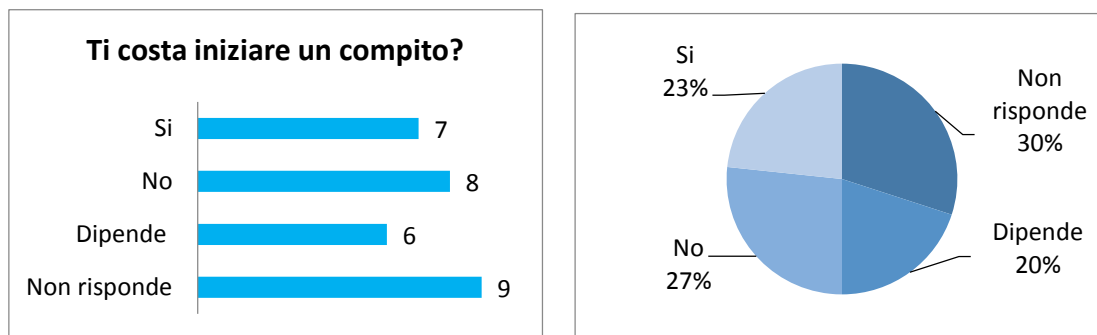
Le emozioni che vengono nominate dagli studenti sono:

Positive:

- Allegria
- Curiosità
- Interesse (2 studenti)
- Soddisfazione terminando (10 studenti)
- Voglia di proseguire

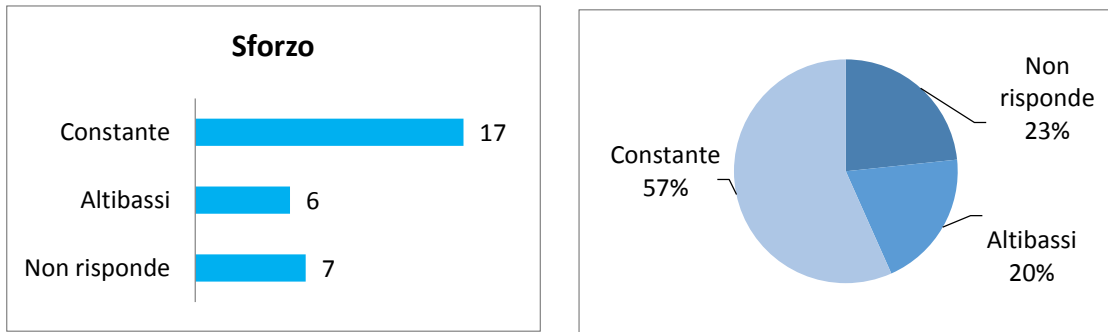
Negative:

- Affanno (4 studenti)
- Fardello quando non riesce (3 studenti)
- Frustrazione (4 studenti)
- Noia
- Paura (2 studenti)
- Stanchezza



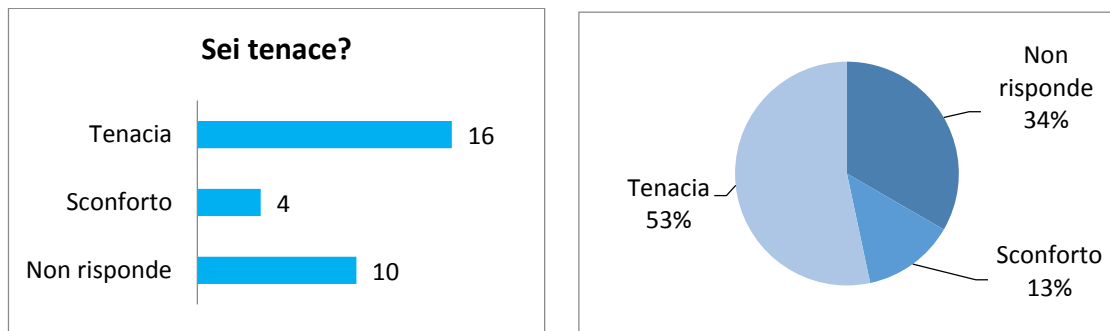
Grafici 4.22

A 7 studenti costa fatica iniziare un compito (23%), a 8 studenti invece no (27%), 6 studenti affermano che dipende dal tipo di compito (20%) mentre nella risposta di 9 studenti non è menzionato.



Grafici 4.23

17 studenti sono costanti nello sforzo (57%), 6 studenti invece dicono di avere alti-bassi (20%) mentre nella risposta di 7 studenti non è menzionato.



Grafici 4.24

16 studenti dicono di essere tenaci (53%), 4 studenti invece dicono di essere inclini allo sconforto (13%) mentre nella risposta di 10 studenti non è menzionato.

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "che tipo di compiti ti piacciono e quali no?".

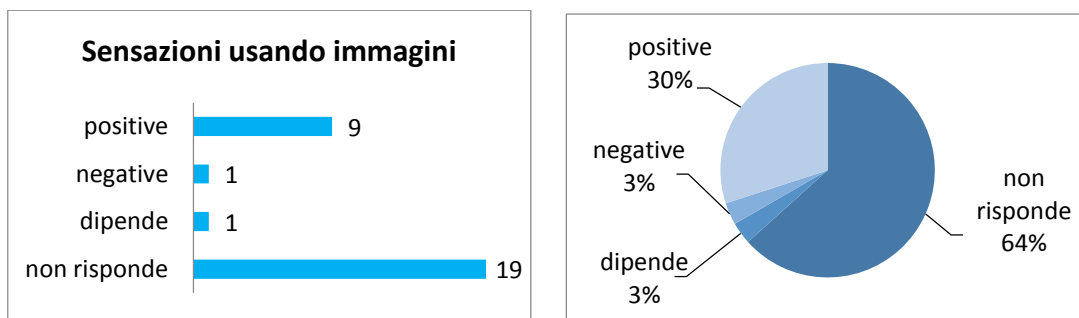
I compiti che piacciono agli studenti risultano essere:

- Algebrici (2 studenti)
- Analitici (2 studenti)
- Applicazioni
- Calcoli
- Che aguzzino l'ingegno (2 studenti)
- Che servano a qualcosa

- Geometrici (2 studenti)
- In gruppo
- Informatizzati
- Logici
- Non monotoni
- Numerici
- Risoluzione di problemi

I compiti che non piacciono agli studenti risultano essere:

- Analitici (2 studenti)
- Con la probabilità
- Dimostrazioni
- Disegnare (2 studenti)
- Geometrici
- Monotoni e ripetitivi
- Numerici



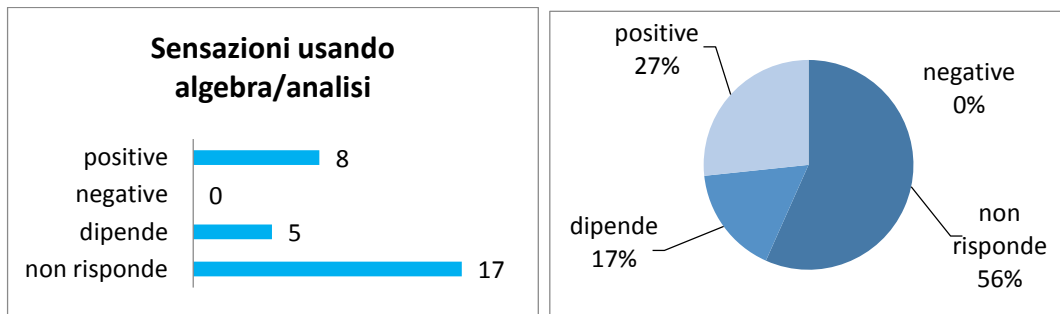
Grafici 4.25

9 studenti dicono di provare sensazioni positive usando le immagini (30%), uno solo studente dice di provarle negative (3%) e un altro afferma che dipende dalla situazione (3%) mentre nella risposta di 19 studenti non è menzionato.

Le sensazioni nominate dagli studenti sono:

- Aiutano nella risoluzione del problema (6 studenti)
- Portano chiarezza delle idee (3 studenti)
- Aiutano nella comprensione
- Sensazioni di felicità (2 studenti)

- Incoraggiano
- “Mi piace usarle” (3 studenti)
- Tranquillità nella risoluzione (2 studenti)



Grafici 4.26

8 studenti affermano di provare sensazioni positive usando i ragionamenti algebrici e analitici (27%), nessuno studente afferma di provarle solamente negative, 5 studenti affermano che dipende dalla situazione (17%) mentre nella risposta di 17 studenti non è menzionato.

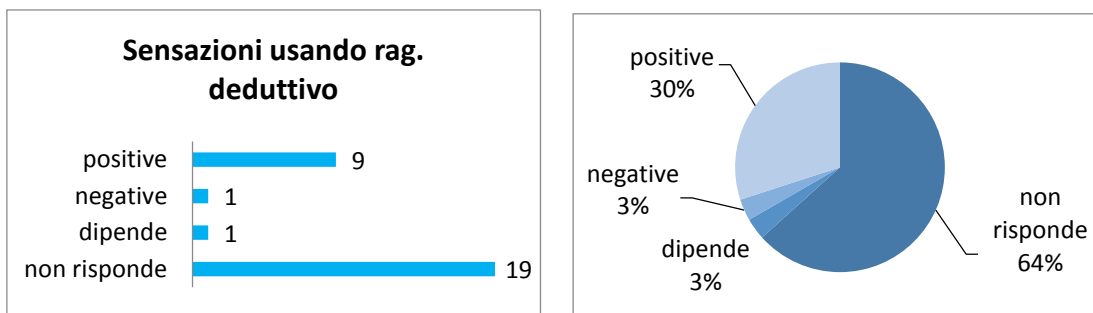
Le sensazioni nominate dagli studenti sono:

Positive:

- Benessere (3 studenti)
- Comodità
- Fiducia
- Formalizzazione
- Piacere (3 studenti)
- Sicurezza (3 studenti)
- Soddisfazione (2 studenti)

Negative:

- Angustia
- Paura

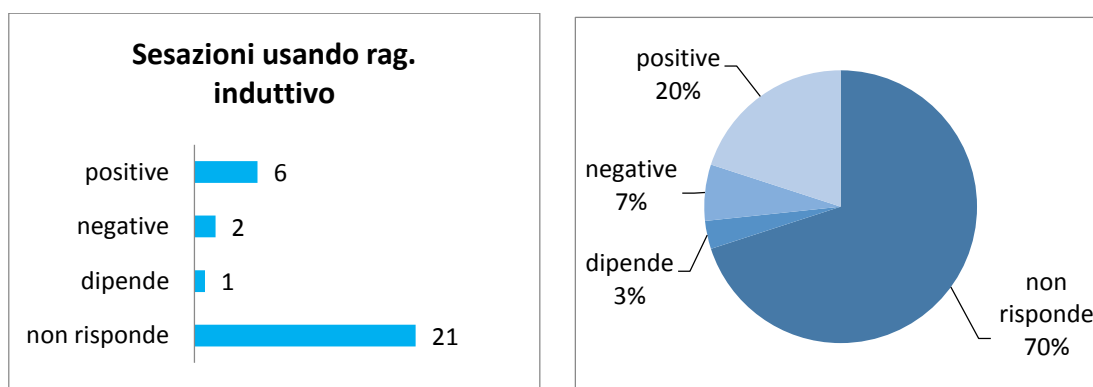


Grafici 4.27

9 studenti affermano di provare sensazioni positive usando il ragionamento deduttivo (30%), un solo studente afferma di provarle solamente negative (3%), un solo studente afferma che dipende dalla situazione (3%) mentre nella risposta di 19 studenti non è menzionato.

Le sensazioni nominate dagli studenti sono:

- Benessere (3 studenti)
- Comodità
- Felicità
- Sicurezza
- Soddisfazione (2 studenti)
- Sorpresa



Grafici 4.28

6 studenti affermano di provare sensazioni positive usando il ragionamento induttivo (20%), 2 studenti affermano di provarle solamente negative (7%), un solo studente afferma che dipende dalla situazione (3%) mentre nella risposta di 21 studenti non è menzionato.

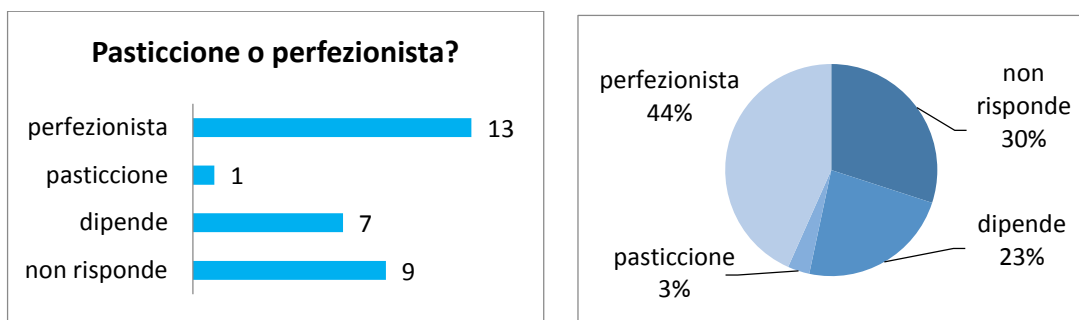
Le sensazioni nominate dagli studenti sono:

Positive:

- Automatismo
- Comodità
- Fiducia
- Soddisfazione

Negative:

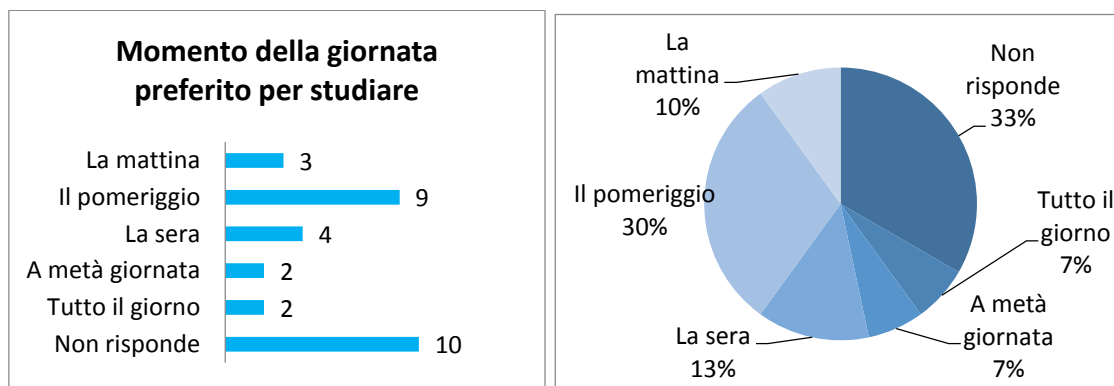
- Pigrizia



Grafici 4.29

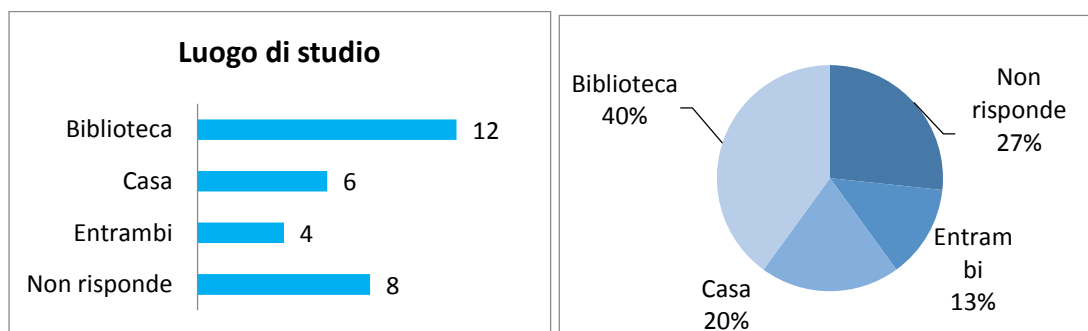
13 studenti affermano di essere perfezionisti (44%), un solo studente afferma di essere pasticcione (3%), 7 studenti affermano che dipende dalla situazione (23%) mentre nella risposta di 9 studenti non è menzionato.

4. Aspetti esterni



Grafici 4.30

3 studenti affermano che preferiscono studiare la mattina (10%), 9 che preferiscono studiare il pomeriggio (30%), 4 la sera (13%), 2 a metà giornata (7%), 2 che studiano tutta a giornata senza preferenze (7%) mentre nella risposta di 10 studenti non è menzionato.



Grafici 4.31

12 studenti affermano che preferiscono studiare in biblioteca (40%), 6 che preferiscono studiare in casa (20%), 4 studenti affermano che studiano in entrambi i luoghi dipende dalla situazione (13%) mentre nella risposta di 8 studenti non è menzionato.

Le caratteristiche dei luoghi di studio menzionate dagli studenti sono:

- Luogo con amici
- Luogo con gente dinamica
- Luogo dove ci sono rumori costanti
- Luogo dove non è presente molta gente

- Luogo dove si può parlare
- Luogo molto spazioso
- Luogo tranquillo (7 studenti)

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "cosa favorisce la tua concentrazione?".

- Ascoltare musica (7 studenti)
- Avere una motivazione (2 studenti)
- Essere ben riposato (6 studenti)
- Essere in compagnia di gente concentrata
- La compagnia degli amici
- Luogo conosciuto
- Rumore della pioggia
- Rumori conosciuti
- Silenzio (8 studenti)
- Solitudine (4 studenti)
- Stare davanti alla scrivania
- Tranquillità (3 studenti)

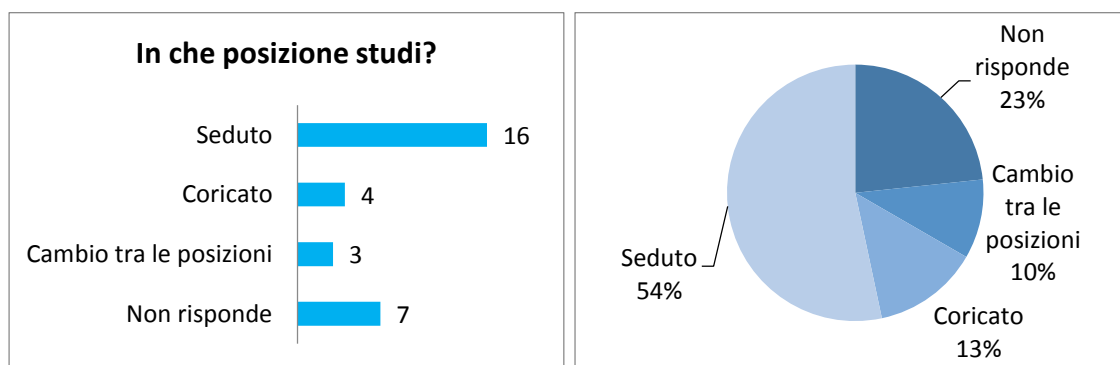
Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "cosa ti distrae?".

- Avere cose da fare
- Avere troppe cose da fare
- Casa (3 studenti)
- Con facilità
- Cose che mi interessano di più
- Disordine
- Interruzioni
- Movimenti (3 studenti)
- Musica che non sia classica
- Posizione scorretta
- Rumori (9 studenti)
- Rumori di voci (2 studenti)
- Silenzio assoluto
- Solitudine
- Stanchezza
- Suoni inaspettati

- Telefono, computer, tv (5 studenti)

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "in che circostanze è solita emergere l'ispirazione?"

- Ascoltando musica
- Camminando
- Quando meno te l'aspetti (3 studenti)
- Disegnando
- Facendo sport (2 studenti)
- In biblioteca con molta gente
- Nei momenti di riposo (4 studenti)
- Parlando dei dubbi
- Pensando ad altre cose
- Prima di addormentarmi (4 studenti)
- Quando non sto studiando (2 studenti)
- Quando smetto di pensare al problema (2 studenti)
- Riflettendo (2 studenti)
- Rilassandosi
- Stando solo in casa
- Studiando (2 studenti)



Grafici 4.32

16 studenti affermano di studiare in posizione seduta (54%), 4 in posizione coricata (13%), 3 affermano di alternare le due posizioni (10%) mentre nella risposta di 7 studenti non è menzionato.

Dall'analisi delle risposte, si sono potuti estrarre gli aspetti relativi alla domanda "di quante ore di riposo hai bisogno?".

Per quanto riguarda le ore di sonno notturne:

- Minimo 8 ore (2 studenti)
- 8 ore (7 studenti)
- 7 ore (2 studenti)
- Minimo 6 ore
- Dipende (2 studenti)
- Uno studente soffre di insonnia

Per quanto riguarda le ore di sonno diurne:

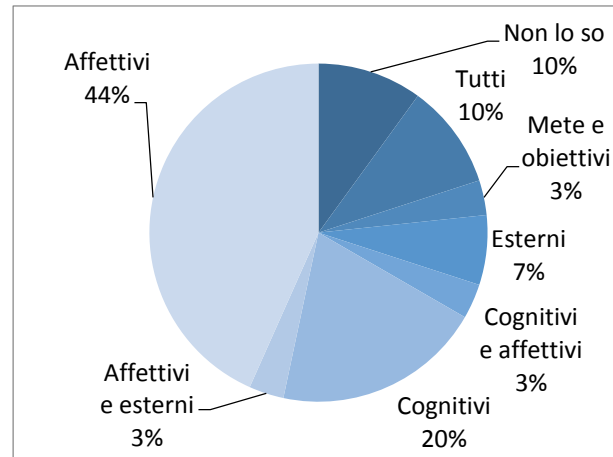
- Dopo mangiato mezz'ora
- Nel pomeriggio mezz'ora

Per quanto riguarda i momenti di riposo all'interno dello studio:

- 15 minuti ogni ora e mezza
- 20 minuti a metà
- Ogni ora
- Mezz'ora a metà (2 studenti)
- Mezz'ora ogni molte ore

5. Aspetti che influiscono di più nel ritratto euristico





Grafici 4.33

13 studenti affermano che gli aspetti che più influiscono sul proprio ritratto euristico sono quelli affettivi (13%), uno afferma che sono sia gli affettivi che gli esterni (3%), 6 quelli cognitivi (20%), uno afferma che sono sia i cognitivi che gli affettivi (3%), 2 quelli esterni (7%), uno mete o obiettivi (3%), 3 affermano che tutti gli aspetti influiscono ugualmente sul loro proprio ritratto euristico (10%) mentre 3 non sanno quale di questi influisce maggiormente sugli altri (10%).

Osservazioni sul terzo questionario

Dall'analisi delle risposte possiamo osservare che la maggior parte degli studenti è stato guidato dalla sete di conoscenza nell'avanzare dei suoi studi (53%) ma adesso ha come scopo quello di raggiungere nel miglior modo possibile il mondo del lavoro (40%).

La maggior parte degli studenti ha curiosità per l'ignoto (56%) e a una percentuale molto alta (80%) piace riflettere. Preferisce il ragionamento deduttivo (57%). La maggior parte si concentra in una cosa alla volta (50%) anche se una buona percentuale (34%) è solita invece concentrarsi in diverse cose. La maggior parte dice di far uso di immagini (73%) e di essere intuitivo (57%).

C'è un bilanciamento tra sentimenti positivi e negativi prodotti affrontando un problema, così come emozioni più frequenti risolvendolo. La maggior parte degli studenti sono costanti (57%) e tenaci (53%). In generale le sensazioni usando le immagini, i ragionamenti algebrici, analitici, deduttivi e induttivi sono positive. La maggior parte di loro dice di essere perfezionista (44%).

La maggioranza degli studenti preferisce studiare durante il pomeriggio in biblioteca, importante è che il luogo sia tranquillo. Possiamo distinguere due gruppi di studenti uno (23%) che è solito ascoltare musica per concentrarsi mentre l'altro (27%) preferisce il silenzio. In generale i rumori (30%) e i movimenti sono le cause maggiori di distrazione, seguite da vicino dalla tecnologia (17%), che tanto può essere utile per lo studio quanto distraente. In generale l'intuizione è solita emergere in momenti differenti dallo studio (77%). La maggior parte degli studenti riposa 8 ore.

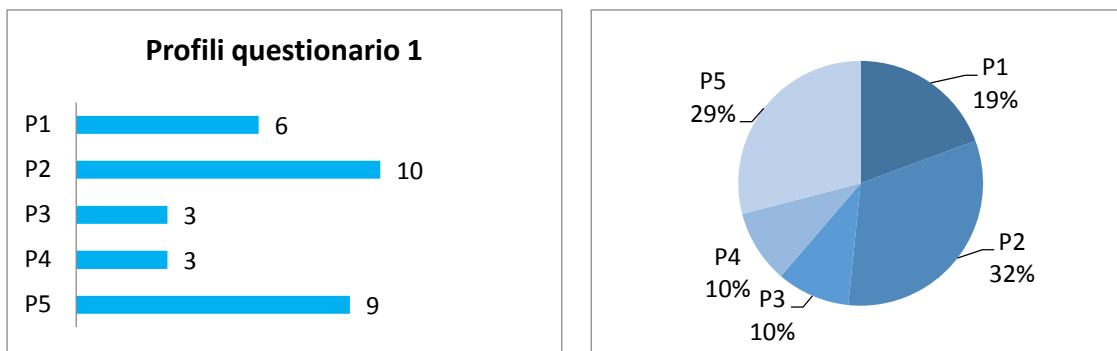
Per quanto riguarda quali sono gli aspetti che vengono considerati più influenti la percentuale più alta dichiara che sono gli aspetti affettivi (44%), seguita dagli aspetti cognitivi (20%).

4.4. CONCLUSIONI ALL'ANALISI DEI QUESTIONARI ATTITUDINALI

Dall'analisi dei primi questionari si sono potuti tracciare alcuni profili comuni agli studenti. Verrà specificata la frequenza e la percentuale di studenti appartenenti ai distinti profili tramite un grafico.

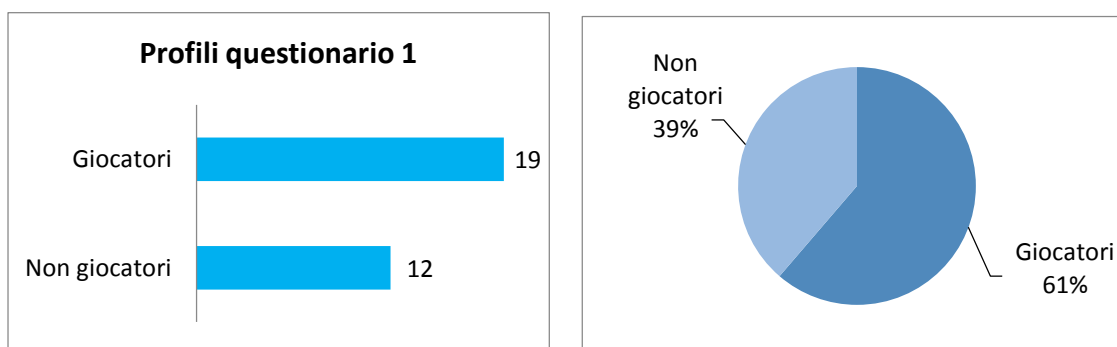
Nel primo questionario abbiamo potuto suddividere gli studenti in 5 differenti profili:

- P1. Studente interessato ai giochi, pratica sia quelli da tavola che quelli più tecnologici.
- P2. Studente interessato ai giochi, non pratica quelli più tecnologici.
- P3. Studente poco interessato ai giochi, pratica quelli più tecnologici.
- P4. Studente interessato ai giochi ma, che non pratica nessun tipo di gioco.
- P5. Studente non interessato ai giochi e che non pratica nessun tipo di gioco.



Grafici 4.34

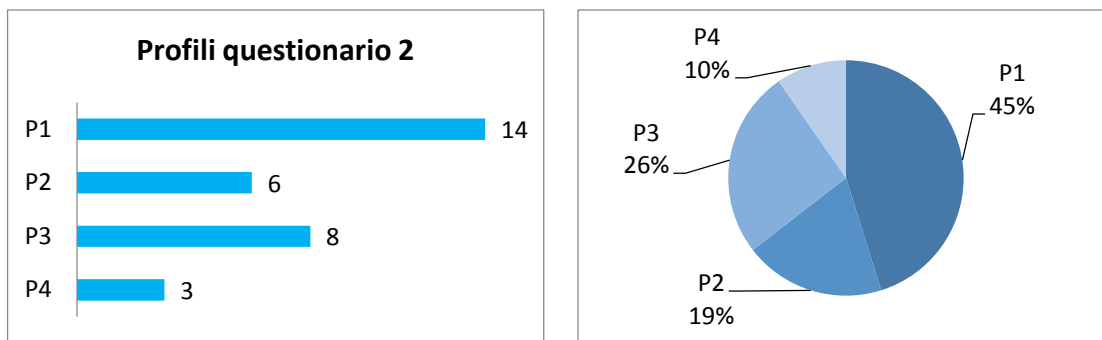
In particolare possiamo ancora suddividere gli studenti appartenenti ai distinti profili in due categorie: giocatori e non giocatori.



Grafici 4.35

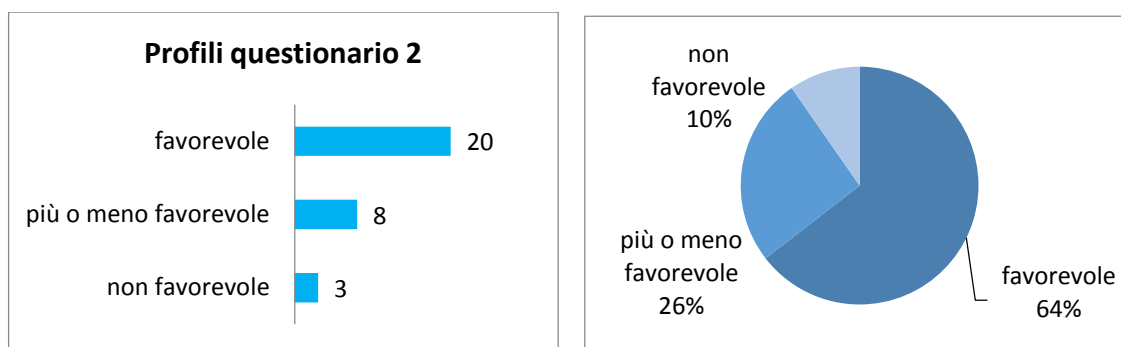
Dall'analisi del secondo questionario invece abbiamo potuto suddividere gli studenti in 4 differenti profili:

- P1. Studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'alta opinione sui giochi
- P2. Studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione media sui giochi
- P3. Studente più o meno favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione medio-alta sui giochi
- P4. Studente non favorevole all'uso dei giochi nella didattica con un'opinione medio-bassa sui giochi



Grafici 4.35

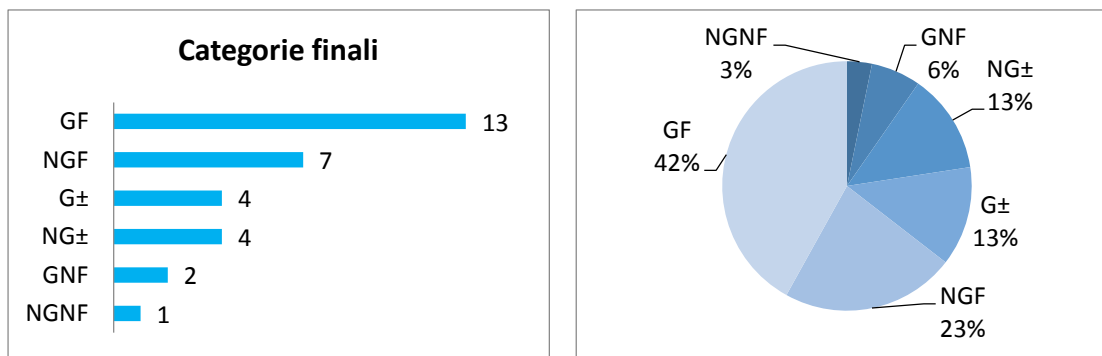
In particolare possiamo ancora suddividere gli studenti appartenenti ai distinti profili in tre categorie: favorevoli, più o meno favorevoli e non favorevoli all'uso dei giochi nella didattica



Grafici 4.36

Infine, combinando i risultati dei due questionari abbiamo potuto suddividere gli alunni in 6 categorie:

- GF. Giocatori, favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- NGF. Non giocatori, favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- G±. Giocatori, più o meno favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- NG±. Non giocatori, più o meno favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- GNF. Giocatori, non favorevoli all'uso dei giochi nella didattica
- NGNF. Non giocatori, non favorevoli all'uso dei giochi nella didattica



Grafici 4.37

Data la disparità tra le risposte del terzo questionario non è stato possibile redigere alcun profilo, questo questionario verrà utilizzato per approfondire i comportamenti dei due studenti che sono stati scelti per lo studio di caso.

Possiamo osservare che quasi la totalità degli studenti del gruppo di studio è abbastanza favorevole all'uso dei giochi nella didattica (91%) nonostante ci sia una percentuale importante di non giocatori (39%) e di studenti non interessati ai giochi (39%).

Una così alta percentuale di studenti che non gioca può essere dovuta al fatto che, cosa che emerge anche dalle risposte al questionario 3, abbiano una mole di lavoro per l'università, tra attività da consegnare e studio, notevole durante la giornata. Più preoccupante invece, in una prospettiva futura di insegnamento, è la percentuale di studenti che non sono interessati ai giochi. Il perché questi studenti non siano interessati ai giochi è probabilmente radicato nel fatto che come afferma Corbalán (1994) spesso gli adulti considerano i giochi come attività ricreativa poco seria, che viene praticata solamente in tenera età. Anche se, come abbiamo visto nel capitolo 1, i giochi sono degli importanti strumenti cognitivi per le persone, sia per i bambini che per gli adulti (Shute, 2011). Avvalora la nostra ipotesi il fatto che nonostante non siano interessati siano d'accordo con il loro uso nella didattica e in particolare, come specificato dalla domanda, nella scuola Secondaria, ovvero negli ultimi anni della scuola dell'obbligo (12-16 anni). Forse un'informazione sui diversi tipi di gioco e i loro possibili utilizzi potrebbero migliorare l'attitudine di questi alunni nei loro confronti.

CAPITOLO 5

ANALISI GENERALE DEL GRUPPO DI STUDIO

L'analisi dei protocolli di risoluzione dei due problemi e dei due giochi ha portato a risultati interessanti. Come specificato nel capitolo 2, sono state realizzate due analisi differenti dei protocolli di risoluzione. Nella prima si è analizzato globalmente il gruppo di studio, mentre nella seconda è stato fatto uno studio di caso scegliendo due studenti ritenuti interessanti al termine della prima analisi. In questo capitolo vengono riportati i risultati relativi alla prima analisi. Dopo una prima parte in cui si analizzeranno globalmente le differenti strategie sviluppate nei quattro problemi proposti, con particolare attenzione alla comparazione delle diverse strategie per la valutazione del maggiore o minore sviluppo nella risoluzione dei giochi rispetto che in quella dei problemi, verrà effettuato un approfondimento sull'uso della strategia del ragionamento regressivo, obiettivo finale della nostra ricerca, integrandolo con i risultati del questionario 5 per quanto riguarda i problemi e il Solitario Triangolare. Le analisi dei due problemi verranno integrate con le risposte al questionario 4: Protocollo di risoluzione.

Il quarto questionario riguardava lo svolgimento dei protocolli di risoluzione dei problemi. I quesiti vertevano sulla conoscenza pregressa di un problema simile o uguale, sulle intuizioni iniziali per la risoluzione, sul processo di risoluzione e sulle strategie utilizzate.

Quesiti Questionario 4: Protocollo di risoluzione.

1. Avevi già visto il problema in precedenza?
2. Avevi già visto in precedenza un problema strettamente correlato?
3. Hai avuto subito idea di come iniziare il problema? Spiega quali sono state le tue intuizioni.
4. Hai pianificato la soluzione o ti sei lanciato nella risoluzione?
5. Credi che il tuo lavoro sul problema sia stato organizzato o disorganizzato?
6. Stima la difficoltà del problema.
7. Hai utilizzato qualche strategia di risoluzione conosciuta? Spiegala.

Le domande 1. e 2. erano a risposta obbligata Si/No.

La domanda 3. era divisa in due parti. La prima parte era a risposta obbligata Si/No, mentre la seconda parte a risposta aperta.

La domanda 4. era a risposta multipla con queste opzioni:

- Mi lancio nella risoluzione.
- Pianifico poco.
- Pianifico abbastanza.
- Prima penso bene cosa fare.

La domanda 5. era a risposta multipla con queste opzioni:

- Più o meno aleatorio.
- Poco organizzato.
- Organizzato.
- Bene organizzato.

La domanda 6. era a risposta multipla con queste opzioni:

- Facile.
- Accessibile.

- Abbastanza difficile.
- Difficile.

La domanda 7. era a risposta aperta.

Degli alunni totali della classe (32), 26 hanno risposto al questionario sia relativamente al Problema dei Fagioli che a quello dei Cammini.

Per motivi di Privacy i nomi utilizzati in questo capitolo sono fittizi.

5.1. UTILIZZO DELLE STRATEGIE DI RISOLUZIONE

Come abbiamo visto approfonditamente nel primo capitolo, le possibili strategie di risoluzione comuni ai problemi e ai giochi sono molteplici. Analizzando i protocolli degli studenti abbiamo potuto ricavare una lista delle strategie usate dagli studenti nella risoluzione dei due problemi e dei giochi proposti:

- *Tentativi ed errori*
- *Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice*
- *Scomporre il problema in problemi più piccoli, semplificare*
- *Sperimentare ed estrarre modelli (o regolarità), praticare l'induzione*
- *Risolvere problemi simili, analogie*
- *Seguire un metodo, organizzarsi*
- *Fare schemi, tabelle, disegni, rappresentazioni grafiche*

Divisa in:

- *Fare schemi e tabelle*
- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*
- *Studio sistematico di tutti i casi*

- *Utilizzare un metodo appropriato di espressione: verbale, algebrico, grafico, numerico*

Divisa in:

- *Utilizzare un linguaggio algebrico*
 - *Utilizzare diagrammi ad albero*
- *Approfittare della simmetria*
 - *Dedurre e trarre conclusioni*
 - *Fare congetture sulla soluzione*
 - *Analizzare casi limite*
 - *Partire dalla fine, supporre il problema risolto*

A cui abbiamo aggiunto:

- *Fare uso delle nozioni apprese di probabilità*
Consiste nel considerare il problema come un esercizio tipico di probabilità e usare le nozioni apprese nelle lezioni della materia per risolverlo.
- *Fare tentativi senza una strategia specifica*
In molti, purtroppo, hanno giocato ai solitari andando per tentativi fino a raggiungere una soluzione, senza pensare ad una strategia specifica di risoluzione.
- *Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco*
Questa strategia, che di solito fa parte dell'analisi preliminare del gioco, ovvero della fase di familiarizzazione con lo stesso, è stata usata da alcuni studenti per ottenere informazioni utili per la risoluzione, apportando quindi un miglioramento nelle strategie di gioco.

Abbiamo analizzato le strategie usate e le abbiamo raggruppate in una tabella con le percentuali relative al loro utilizzo. Al termine di ogni tabella esponiamo alcuni esempi delle strategie elencate.

5.1.1. Problema dei Fagioli

Riassumiamo nella seguente tabella percentuali delle strategie usate per la risoluzione del Problema dei Fagioli.

Strategia	n° alunni	Percentuale
Risolvere un problema più semplice	3	9%
Risolvere problemi simili, analogie	2	6%
Seguire un metodo, organizzarsi	13	41%
Fare schemi e tabelle	2	6%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	24	75%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	4	13%
Utilizzare un linguaggio algebrico	13	41%
Utilizzare diagrammi ad albero	6	19%
Approfittare della simmetria	3	9%
Dedurre e trarre conclusioni	2	6%
Fare congetture sulla soluzione	3	9%
Analizzare casi limite	6	19%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	3	9%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	14	44%

Tabella 5.1

Hanno svolto il problema 30 alunni su 32 del campione. Di questi, 16 hanno raggiunto la soluzione del problema (53%).

Esempi di strategie usate:

- *Risolvere un problema più semplice*

Miriam: la studentessa riduce i valori del problema per facilitare la sua risoluzione.

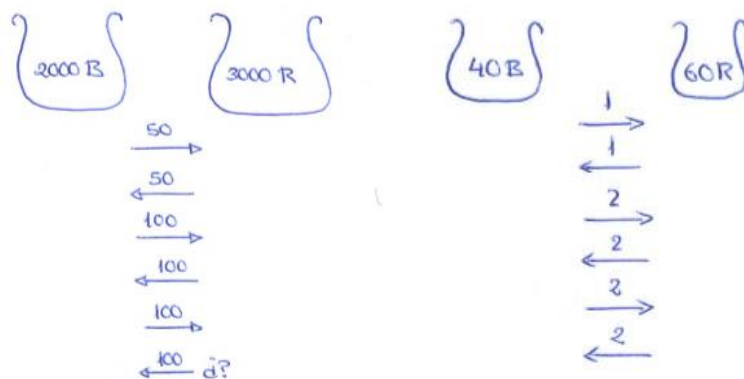


Figura 5.1

- *Risolvere problemi simili, analogie*

Andrei: lo studente pensa di usare le nozioni di probabilità dopo aver visto un'analogia con i problemi tipici della materia.

"Ho cercato di pensare a una strategia per risolvere il problema e ho deciso di compararlo con un problema simile. Mi è venuto in mente il problema delle due urne con palline di differenti colori, da estrarre e rimpiazzare e tornare a estrarre. Così ho deciso di fare uso del calcolo delle probabilità per trovare una soluzione."

- *Fare schemi e tabelle*

Patricia: la studentessa usa una tabella per la risoluzione del problema.

SACO BLANCO		SACO ROJO	
B	R	B	R
2000	0	0	3000
1950	0	50	3000
$1950 + \frac{50}{61}$ $(119000)/61$	$\frac{3000}{61}$	$50 - \frac{50}{61} = \frac{3000}{61}$	$3000 - \frac{3000}{61} = \frac{180000}{61}$
$\frac{119000 - 5750}{61} = \frac{113250}{61}$	$\frac{3000 - 150}{61} = \frac{2850}{61}$	$\frac{3000 + 5750}{61} = \frac{8750}{61}$	$\frac{180000 - 150}{61} = \frac{180150}{61}$
$\frac{113250 + 880}{61} = \frac{251350}{1891}$	$\frac{2850 + 180150}{61} = \frac{268200}{1891}$	$\frac{8750 + 8750}{61} = \frac{268200}{1891}$	$\frac{180150 + 180150}{61} = \frac{340300}{1891}$
$\frac{513500 - 527025}{1891} = \frac{496475}{3782}$	$\frac{268200 - 40275}{1891} = \frac{227925}{3782}$	$\frac{268200 - 527025}{1891} = \frac{-258825}{3782}$	$\frac{340300 + 40275}{1891} = \frac{380575}{3782}$
$\frac{6499975}{3782} + \frac{354675}{26474} = \frac{22927250}{13237}$	$\frac{496475}{3782} + \frac{3616425}{26474} = \frac{3546750}{13237}$	$\frac{-258825}{3782} - \frac{354675}{26474} = \frac{-3546750}{13237}$	$\frac{380575}{3782} - \frac{2616425}{26474} = \frac{36164250}{13237}$

Figura 5.2

- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*

Mercedes: la studentessa rappresenta la situazione con un disegno.

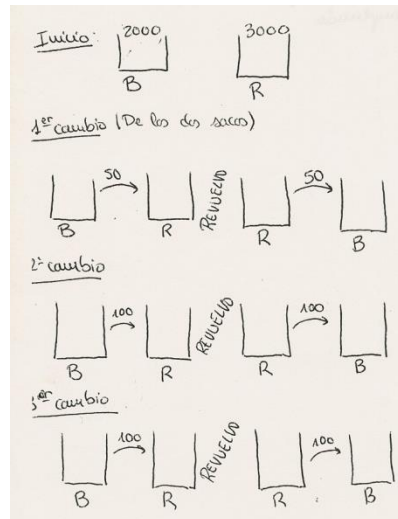


Figura 5.3

- *Fare uno studio sistematico di tutti i casi*

Pilar: la studentessa fa uno studio sistematico dei casi.

“Spostiamo 50 fagioli bianchi nel sacco rosso e rimescoliamo e adesso spostiamo 50 fagioli dal sacco rosso al sacco bianco.

Immaginiamo di spostarne 48 rossi e 2 bianchi, quindi rimarrebbero 48 fagioli rossi nel sacco bianco e $50 - 2 = 48$ fagioli bianchi nel sacco rosso.

Ora supponiamo per esempio, dei 100 fagioli del sacco bianco, di spostarne 90 bianchi e 10 rossi nel sacco rosso, quindi nel sacco rosso rimarrebbero $48 + 90 = 138$ fagioli bianchi. Ora se spostassimo altri 100 fagioli dal sacco rosso al bianco, potremmo supporre che 80 siano rossi e 20 bianchi, quindi ci rimarrebbero:

$$48 - 10 + 80 = 108 \text{ fagioli rossi nel sacco bianco}$$

$$138 - 20 = 108 \text{ fagioli bianchi nel sacco rosso.}”$$

- *Utilizzare un linguaggio algebrico*

Marlon: lo studente usa una notazione algebrica nella risoluzione del problema.

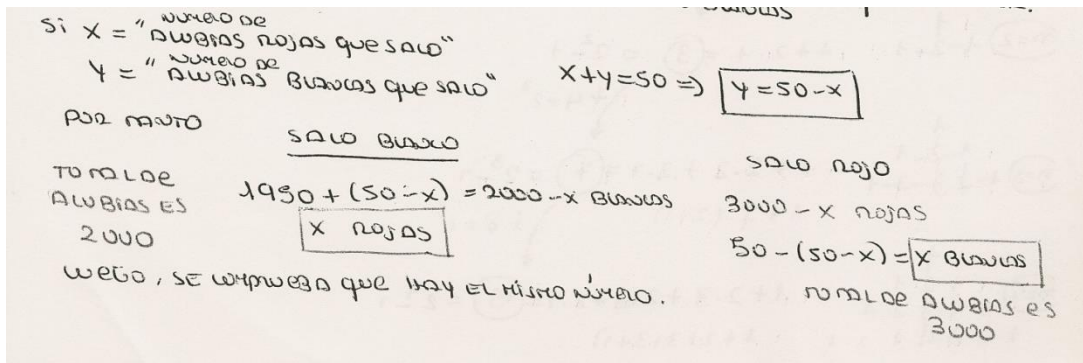


Figura 5.4

- Utilizzare diagrammi ad albero

Marta: la studentessa dopo aver semplificato il problema analizza tutti i casi possibili con l'uso di un diagramma ad albero.

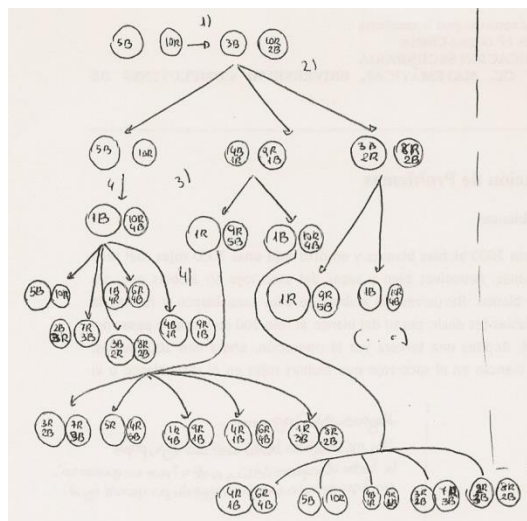


Figura 5.5

- Approfittare della simmetria

Paula: la studentessa approfitta della simmetria del problema per risolverlo.

"Siccome in tutti i passaggi di fagioli si sono messi e si sono tolti lo stesso numero di fagioli, sappiamo che nel sacco bianco rimangono 2000 fagioli."

- Dedurre e trarre conclusioni

Paula: la studentessa deduce la conclusione del problema dalle osservazioni sulla simmetria del problema.

“In totale ci sono 2000 fagioli bianchi. Se ci sono B fagioli bianchi nel sacco rosso allora ci saranno $2000 - B$ fagioli bianchi nel sacco bianco. Siccome in tutti i passaggi di fagioli che si sono fatti si sono messi e si sono tolti lo stesso numero di fagioli, sappiamo che nel sacco bianco rimangono 2000 fagioli. Siccome abbiamo visto che nel sacco bianco ci sono $2000 - B$ fagioli bianchi, i B restanti devono essere rossi. Allora il numero di fagioli rossi nel sacco bianco è: $R = B$.”

- *Fare congetture sulla soluzione*

Inmaculada: la studentessa esplicita la sua prima intuizione all’inizio della risoluzione del problema.

“In un primo momento l’intuizione mi dice che alla fine ci sarà lo stesso numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e rossi nel sacco bianco, però questo non basta. Devo trovare qualche modo per provarlo.”

- *Analizzare casi limite*

Yaiza: la studentessa analizza i casi limite del problema, riportiamo cosa scrive accanto alla risoluzione più schematica riportata nella figura 6.

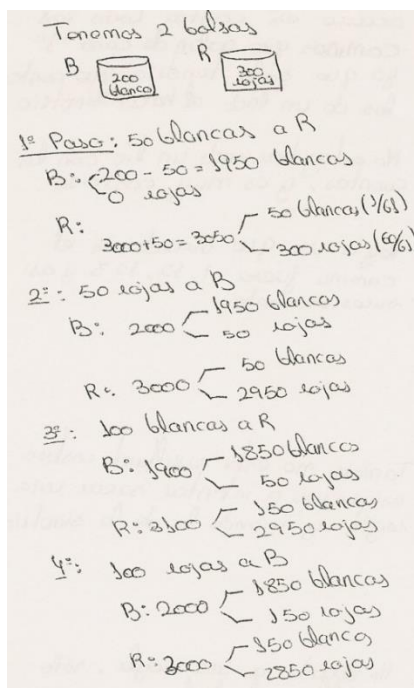


Figura 5.6

“Vedo cosa succede se ci mettiamo nel caso estremo in cui tutte le palline che tolgo dalla borsa bianca (B) per passarle alla borsa rossa (R) sono bianche o, nel caso contrario, rosse.”

- *Utilizzare il ragionamento regressivo*

Paula: la studentessa dopo aver trovato la soluzione tramite delle deduzioni, cerca una giustificazione per il risultato trovato tramite delle equazioni.

$R_B = \text{"n° cubitos rojos en el saco blanco"}$
 $R_R = \text{"n° cubitos rojos en el saco rojo"}$
 $B_B = \text{"n° cubitos blancos en el saco blanco"}$
 $B_R = \text{"n° cubitos blancos en el saco rojo"}$

Planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} 2000 = B_B + B_R & \leftarrow \text{numero de cubitos blancos constante} \\ 2000 = B_B + R_B & \leftarrow \text{numero de cubitos del saco blanco constante} \end{cases}$$

⇓

$$B_B + B_R = B_B + R_B \Rightarrow B_R = R_B$$

Figura 5.7

- *Fare uso delle nozioni apprese di probabilità*

Mercedes: la studentessa suppone che dopo i primi due passaggi siano stati trasferiti 50 fagioli bianchi nel primo e 50 fagioli bianchi nel secondo, a questo punto calcola le probabilità e deduce che il numero finale sarà diverso, in particolare che ci saranno più fagioli rossi nel sacco bianco che bianchi nel sacco rosso.

$$P_{rB} = \frac{50}{2000} = \frac{1}{40}$$

$$P_{bR} = \frac{50}{3000} = \frac{1}{60}$$

Figura 5.8

5.1.2. Problema dei Cammini

Riassumiamo nella seguente tabella percentuali delle strategie usate per la risoluzione del Problema dei Cammini.

Strategia	n° alunni	Percentuale
Risolvere un problema più semplice	8	25%
Estrarre regolarità, praticare l'induzione	8	25%
Risolvere problemi simili, analogie	1	3%
Seguire un metodo, organizzarsi	13	41%
Fare schemi e tabelle	2	6%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	22	69%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	16	50%
Utilizzare un linguaggio algebrico	1	3%
Utilizzare diagrammi ad albero	6	19%
Approfittare della simmetria	19	59%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	8	25%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	3	9%

Tabella 5.2

Hanno svolto il problema 30 alunni su 32 del campione. Di questi, 21 hanno raggiunto la soluzione del problema (70%).

Esempi di strategie usate:

- *Risolvere un problema più semplice e Estrarre regolarità, praticare l'induzione*

Marcos: lo studente analizza dei casi più piccoli per ottenere una regolarità e una formula generale che valga per ogni ordine di triangolo.

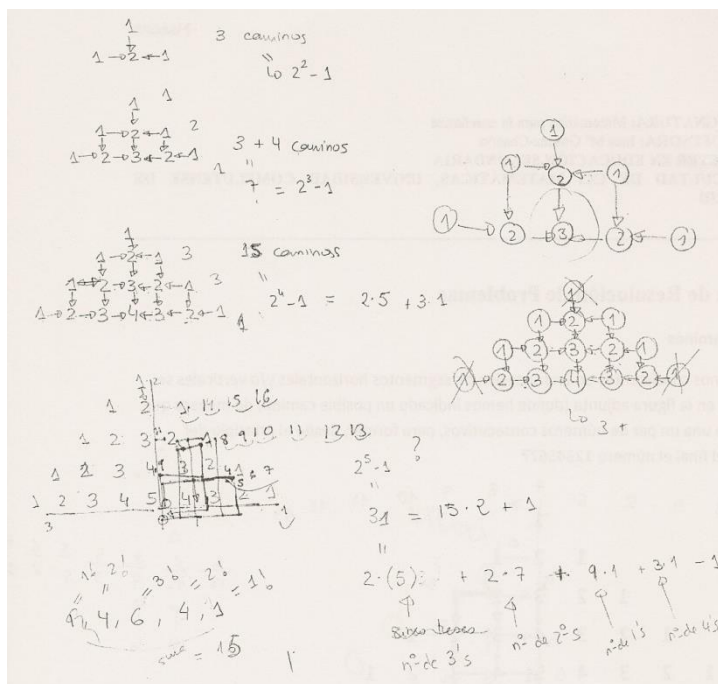


Figura 5.9

E alla fine del protocollo scrive:

“Suppongo che la regola di formazione è $2^n - 1$ così che con $n = 7$ abbiamo $2^7 - 1 = 127$.”

- *Seguire un metodo, organizzarsi*

Laura: la studentessa numera ogni passaggio del metodo utilizzato.

”1° Vediamo se possiamo dividere la piramide [...]

2° Ci rendiamo conto che il numero di cammini delle colonne (2) e (6) deve essere lo stesso [...]

3° Andiamo a contare i cammini sul disegno [...]

4° Facciamo i calcoli e otteniamo il risultato [...]

- *Fare schemi e tabelle*

Inmaculada: la studentessa cerca di legare il numero di cammini all'ordine del triangolo con l'aiuto di una tabella.

escalón	n° de caminos
1	2
2	$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3!$
3	$30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Figura 5.10

- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*

Miriam: la studentessa disegna sistematicamente i cammini per poterli contare.

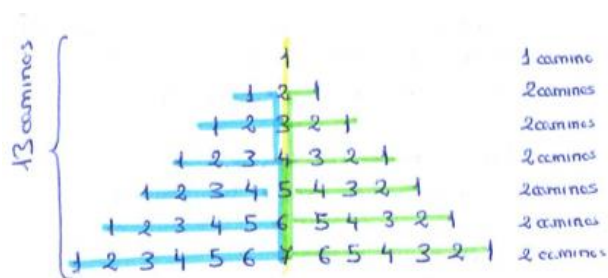


Figura 5.11

- *Fare uno studio sistematico di tutti i casi*

Andrei: lo studente, dividendoli a gruppi, conta tutti i cammini possibili

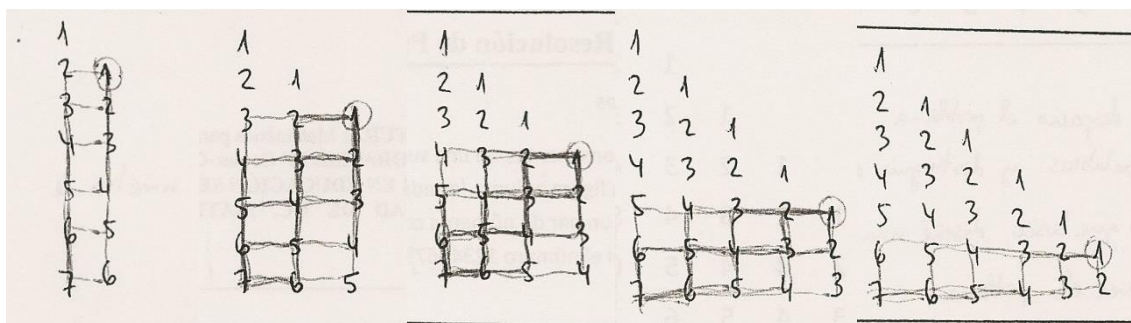


Figura 5.12

- *Utilizzare diagrammi ad albero*

Patricia: la studentessa utilizza molto chiaramente un diagramma ad albero per contare sistematicamente tutti i cammini.

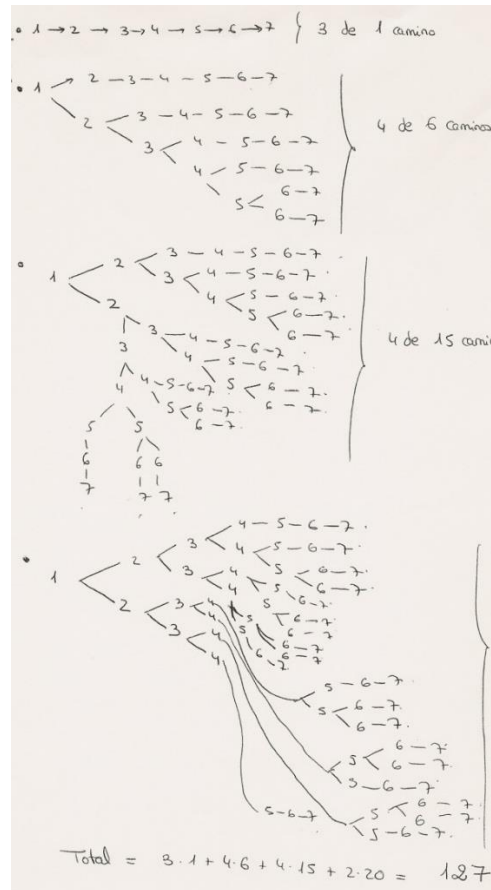


Figura 5.13

- *Approfittare della simmetria*

Alicia: la studentessa usa la simmetria del problema per semplificare i calcoli.

“Dividiamo la piramide in due dato che se si comincia il percorso da un lato non si può finire dall’altro. In questo modo, il numero totale di cammini che c’è in una metà sarà il doppio meno uno, perché quello che c’è esattamente a metà lo contiamo due volte.”

- *Utilizzare il ragionamento regressivo*

Paula: la studentessa inizia a contare i cammini possibili a partire dalla posizione 7.

“Tutti i cammini finiscono nella stessa casella quindi credo che mi sia più facile contare i cammini che escono dal 7.”

- Fare uso delle nozioni apprese di probabilità

Andrea: la studentessa utilizza le nozioni di calcolo combinatorio per giungere alla conclusione.

La 1ª fila \rightarrow 1 opción
 La 2ª fila \rightarrow $6 \times 2 = 12$ caminos
 (6 pasos)
 La 3ª fila $5+4+3+2+1 = 15 \times 2 = 30$
 \rightarrow combinatoria:
 $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} \times 2 + \binom{6}{3} \times 2 + \binom{6}{4} \times 2 + \binom{6}{5} \times 2 + \binom{6}{6} =$
 $= 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 2 =$
 $= 1 + 12 + 30 + 40 + 30 + 12 + 2 = 127$ caminos.

Mi primera idea es tratar de contarlos.
 Es combinatoria.
 Veo un patrón...
 ¡lo tengo!
 127 caminos

Figura 5.14

5.1.3. Solitario Triangolare

Riassumiamo nella seguente tabella percentuali delle strategie usate per la risoluzione del Solitario Triangolare.

Strategia	n° alunni	Percentuale
Tentativi ed errori	4	13%
Risolvere un problema più semplice	2	6%
Scomporre il problema, semplificare	1	3%
Risolvere problemi simili, analogie	1	3%
Seguire un metodo, organizzarsi	11	34%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	16	50%
Approfittare della simmetria	13	41%
Fare congetture sulla soluzione	2	6%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	19	59%
Fare tentativi senza una strategia specifica	25	78%
Riconoscere il ruolo delle pedine	16	50%

Tabella 5.3

Hanno svolto il problema 31 alunni su 32 del campione. Di questi, 23 hanno raggiunto la soluzione del problema (74%).

Esempi di strategie usate:

- *Tentativi ed errori*

Mercedes: la studentessa risolve il problema per tentativi ed errori. Proponiamo un esempio preso dal suo protocollo.

Handwritten notes from Mercedes's protocol:

[5] Podemos mover: $\left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 9 \\ 4 \rightarrow 6 \\ 4 \rightarrow 13 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 7 \rightarrow 9 \\ 11 \rightarrow 13 \\ 15 \rightarrow 6 \end{array} \right\}$
 Hay que mover 15 \rightarrow 6.
 Quedan libres: 3, 9, 10, 13, 14, 15

[6] Podemos mover: $\left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 9 \\ 4 \rightarrow 13 \\ 7 \rightarrow 9 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8 \rightarrow 3 \\ 11 \rightarrow 13 \end{array} \right\}$
 Elegimos mover: 8 \rightarrow 3
 Queda libres: 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

Mi fermo ad analizzare la situazione. Per questo cammino non posso proseguire.

Me paro a analizar la situación. Por este camino no voy a poder seguir.

Volvemos a la situación anterior.

[7] Podemos mover: $\left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 9 \\ 4 \rightarrow 13 \\ 7 \rightarrow 9 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8 \rightarrow 3 \text{ (NO)} \\ 11 \rightarrow 13 \end{array} \right\}$
 Elegimos mover 11 \rightarrow 13
 Quedan libres: 3, 9, 10, 11, 12, 14, 15.

Figura 5.15

- *Risolvere un problema più semplice*

Manuel: lo studente prova a risolvere il gioco con un tavolo da gioco di dimensione inferiore.

“Provo con triangoli di meno file. Con 3 file sembra evidente che non ha soluzione, con 4 file credo che si possa solo risolvere se la pallina che manca non è né uno dei vertici, né la centrale. In questo caso trovo facilmente una soluzione, dato che non c’è molto da scegliere, ma continuo a non tirare fuori qualcosa di chiaro.”

- *Scomporre il problema, semplificare*

Miriam: la studentessa scompone il tavolo da gioco in triangoli come nella figura 5.16 e utilizzando il ragionamento regressivo li riempie uno alla volta. I protocolli della studentessa verranno analizzati approfonditamente nel prossimo capitolo.

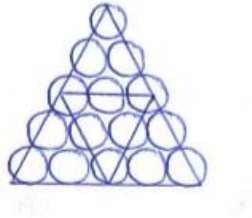


Figura 5.16

- *Risolvere problemi simili, analogie*

Jorge: lo studente cerca di risolvere un gioco simile, ovvero usando le stesse regole muove le pedine su un tavolo da gioco con gli angoli troncati.

” Procedo senza i vertici”

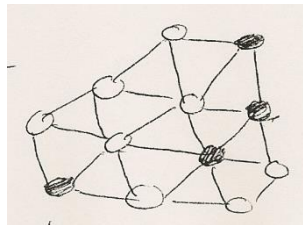


Figura 5.17

- *Seguire un metodo, organizzarsi*

Blanca: la studentessa scrive i vari passaggi del procedimento in modo schematico.

“Il mio primo pensiero è disegnare il procedimento. [...]”

Sembra che quello che c’è da fare è cercare di togliere tutte le pedine dal centro. [...]

Abbiamo qualche pista, come evitare che rimangano pedine nei vertici. [...]

Bisogna iniziare togliendo la 7 o la 8 non c’è altro modo. [...]”

- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*

Andrei: lo studente rappresenta la successione di movimenti sul tavolo da gioco con dei disegni.

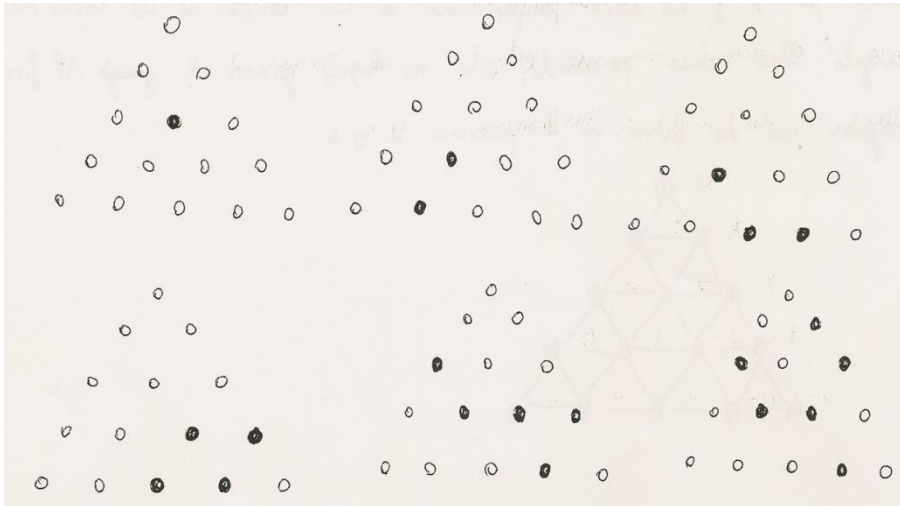


Figura 5.18

- *Approfittare della simmetria*

Mercedes e Andrei: i due studenti utilizzano la simmetria del problema per fare osservazioni sulla risoluzione.

“Mi rendo conto che ci sono solamente due possibili movimenti iniziali e uno è simmetrico dell’altro.” - Mercedes

“Oltre a queste soluzioni [che segnala anteriormente] ci sono anche le simmetriche (girando il tavolo da gioco si ottiene lo stesso).” – Andrei

- *Fare congetture sulla soluzione*

Marina: la studentessa ipotizza che la prima pedina da usare nel ragionamento regressivo dovrebbe essere nella posizione 13, quella che lei pensa essere una possibile soluzione.

“Abbiamo un’idea intuitiva che la pedina 13 sarà l’unica che rimarrà, dato che facendo varie combinazioni in diagonale possiamo toglierle tutte”

Accanto a questa frase disegna molto probabilmente le “possibili combinazioni” che le hanno fatto congetturare che vincendo il gioco rimarrà un’unica pedina nella posizione 13.

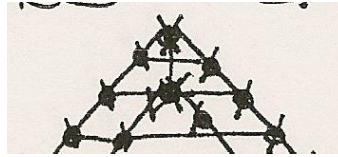


Figura 5.19

- *Utilizzare il ragionamento regressivo*

Inmaculada: la studentessa fa dei tentativi usando il ragionamento regressivo

“Forse è una buona strategia usare la regressione, iniziare con una pedina sul tavolo da gioco e continuare aggiungendo. Con la nuova strategia sono arrivata a una situazione migliore (Figura 5.20), mi rimanevano solo 3 pedine da inserire.”

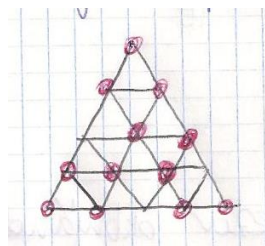


Figura 5.20

Laura: la studentessa prova a risolverlo con il ragionamento regressivo; prima provando con la prima pedina nella posizione 5 (Figura 5.21) e successivamente con la prima pedina nella posizione 13 (Figura 5.37).

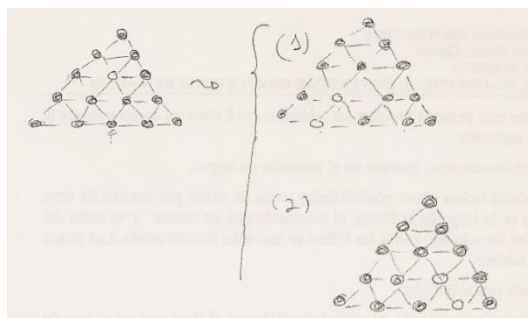


Figura 5.21

- *Riconoscere il ruolo delle pedine*

Javier: lo studente suddivide le posizioni del tavolo da gioco in quattro tipi (Figura 23).

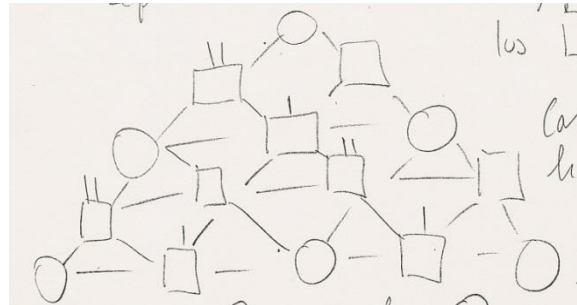


Figura 5.22

5.1.4. Solitario della Bastiglia

Riassumiamo nella seguente tabella percentuali delle strategie usate per la risoluzione del Solitario della Bastiglia.

Strategia	n° alunni	Percentuale
Tentativi ed errori	2	6%
Risolvere un problema più semplice	2	6%
Scomporre il problema, semplificare	20	63%
Risolvere problemi simili, analogie	4	13%
Seguire un metodo, organizzarsi	12	38%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	4	13%
Approfittare della simmetria	9	28%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	12	38%
Fare tentativi senza una strategia specifica	18	56%
Riconoscere il ruolo delle pedine	6	19%

Tabella 5.4

Hanno svolto il problema 28 alunni su 32 del campione. Di questi, 4 hanno raggiunto la soluzione del problema (14%).

Esempi di strategie usate:

- *Scomporre il problema, semplificare*

Andrei – Jorge e Inmaculada – Manuel: gli studenti scompongono il problema in blocchi, ognuno scegliendo una strategia diversa per farlo.

“Ci rendiamo conto che se le pedine stanno raggruppate in un determinato modo possiamo eliminarne molte (utilizzando una sola pedina). [...] All’inizio siamo riusciti a eliminare le pedine dei “bracci” opposti senza cambiare la configurazione che hanno le pedine dopo il primo movimento e identificando più modelli di raggruppamento anche se non ancora molto chiari.” – Andrei e Jorge

“... Siccome il tavolo da gioco è doppiamente simmetrico, pensiamo che se incontrassimo una successione di movimenti che isolino un laterale, potremmo fare tutti gli altri tre allo stesso modo. [...] Al terzo tentativo troviamo una serie di movimenti che ci sembrano curiosi. Numerando le caselle dall’alto in basso e da sinistra a destra abbiamo la seguente giocata:

19-17; 6-18; 13-11; 27-13; 10-12; 13-11

Questa giocata ci consente di lasciare isolato il laterale destro, eccetto la casella 26. Girando il tavolo da gioco di 90° in senso orario, portiamo la parte superiore al laterale destro, e vediamo che la situazione è come se il movimento 19-17 fosse già stato realizzato, e inoltre la casella 26 è vuota. Quindi questo modello si ripete nel laterale sinistro e nella parte inferiore. Sorge un imprevisto, le caselle 5, 15 e 29 non sono vuote e vogliamo che lo siano. La cosa buona è che la 26 si è svuotata completando la giocata nella parte inferiore.” – Inmaculada e Manuel

- *Risolvere problemi simili, analogie*

Inmaculada – Manuel: gli studenti paragonano il gioco al Solitario Triangolare

“La prima cosa che pensiamo, vedendo che questo ha più del doppio delle caselle, è che sarà difficile trovare la soluzione ricordando quanto faticammo a risolvere quello

del Triangolo. [...] Ricordando il problema del Solitario Triangolare, pensiamo che la strategia di ragionamento regressivo non ci servirà molto.”

- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*

Elisa – Marta: le studentesse rappresentano la situazione finale a cui arrivano in un tentativo con un disegno.

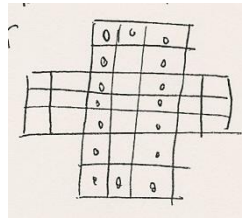


Figura 5.23

- *Approfittare della simmetria*

Inmaculada – Manuel: i due studenti approfittano della simmetria del problema.

“Quello che osserviamo in questo gioco è una chiara simmetria di due assi dove la casella vuota iniziale è al centro di entrambi.”

- *Utilizzare il ragionamento regressivo*

Yaiza – Belén: le due studentesse iniziano a risolvere il problema usando questa strategia.

“Per prima cosa abbiamo cercato di utilizzare il metodo regressivo. Sappiamo che l’ultimo movimento deve essere del tipo 15-17 (o l’equivalente in un altro ramo, essendo simmetrico). Il penultimo movimento sarà del tipo 4-16 o 28-16, ma la mia compagna mi ha ricordato che potrebbe anche essere 18-16.”

- *Riconoscere il ruolo delle pedine*

Alessandro – Andrea: i due studenti si rendono conto dell’importanza delle pedine negli angoli del tavolo da gioco.

“Abbiamo visto che negli estremi della croce rimangono pedine che dopo non possiamo togliere, per questo cerchiamo di eliminarle per prime.”

5.2. COMPARAZIONE DELLE STRATEGIE USATE

Dopo aver analizzato le diverse strategie usate per ogni problema le compariamo raggruppandole in un'unica tabella (Tabella 5.1).

Strategie	Problem.	Problem.	Solitario	Solitario
	Fagioli	Cammini	Triang.	Bastiglia
Tentativi ed errori	-	-	13%	6%
Risolvere un problema più semplice	9%	25%	6%	6%
Scomporre il problema, semplificare	-	-	3%	63%
Estrarre regolarità, praticare l'induzione	-	25%	-	-
Risolvere problemi simili, analogie	6%	3%	3%	13%
Seguire un metodo, organizzarsi	41%	41%	34%	38%
Fare schemi e tabelle	6%	6%	-	-
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	75%	66%	50%	13%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	13%	50%	-	-
Utilizzare un linguaggio algebrico	41%	3%	-	-
Utilizzare diagrammi ad albero	19%	19%	-	-
Approfittare della simmetria	9%	59%	41%	28%
Dedurre e trarre conclusioni	6%	-	-	-
Fare congetture sulla soluzione	9%	-	6%	-
Analizzare casi limite	19%	-	-	-
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	9%	25%	59%	38%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	44%	9%	-	-
Fare tentativi senza una strategia specifica	-	-	78%	56%
Riconoscere il ruolo delle pedine	-	-	50%	19%

Tabella 5.5

Analizzando la tabella generale possiamo fare alcune osservazioni:

Ci sono alcune strategie che vengono utilizzate in modo massiccio in alcuni problemi mentre negli altri vengono utilizzate meno o addirittura non utilizzate. È il caso di queste strategie:

- *Risolvere un problema più semplice*: che viene usata dal 25% degli studenti nel Problema dei Cammini mentre solamente dal 9% nel Problema dei Fagioli e dal 6% nei solitari.
- *Scomporre il problema, semplificare*: che viene usata dal 63% degli studenti nel Solitario della Bastiglia mentre solamente dal 3% in quello Triangolare e non viene utilizzata affatto negli altri problemi.
- *Estrarre regolarità, praticare l'induzione*: che viene utilizzata dal 25% degli studenti nel Problema dei Cammini mentre non viene utilizzata affatto negli altri problemi.
- *Fare uno studio sistematico di tutti i casi*: che viene utilizzata dal 50% degli studenti nel Problema dei Cammini mentre solo il 13% la usa nel Problema dei Fagioli e nessuno nei giochi.
- *Utilizzare un metodo di espressione adeguato, linguaggio algebrico*: che viene utilizzata dal 41% degli studenti nel Problema dei Fagioli mentre solamente dal 3% in quello dei Cammini e non viene utilizzata affatto per gli altri problemi.
- *Analizzare casi limite*: che viene utilizzata dal 19% degli studenti nel Problema dei Fagioli mentre non viene utilizzata affatto per gli altri problemi.
- *Fare uso delle nozioni apprese di probabilità*: che viene utilizzata dal 44% degli studenti nel Problema dei Fagioli mentre il 9% la usa nel Problema dei Cammini e non viene utilizzata nei giochi.
- *Fare tentativi senza una strategia specifica*: che viene usato in modo massiccio nella risoluzione dei giochi, dal 78% degli studenti nel Solitario Triangolare e dal 56% degli studenti nel Solitario della Bastiglia.
- *Riconoscere il ruolo delle pedine*: che viene utilizzata dal 50% degli studenti nel Solitario Triangolare mentre solamente il 19% la usa nel Solitario della Bastiglia.

Ci sono altre strategie invece che vengono utilizzate in tutti i problemi più o meno a seconda del tipo di problema:

- *Risolvere problemi simili, analogie:* che viene usata solamente dal 6% degli studenti nel Problema dei Fagioli, dal 3% nel Problema dei Cammini, dal 3% nel Solitario Triangolare e dal 13% nel Solitario della Bastiglia.
- *Seguire un metodo, organizzarsi:* che viene utilizzata da un buon numero di studenti in tutti i problemi: dal 41% nel Problema dei Fagioli, dal 41% nel Problema dei Cammini, dal 34% nel Solitario Triangolare e dal 38% nel Solitario della Bastiglia.
- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche:* che viene usata in modo massiccio per quasi tutti i problemi; il 75% degli alunni ne fa uso nel Problema dei Fagioli, il 69% ne fa uso nel Problema dei Cammini, il 50% ne fa uso nel Solitario Triangolare e solamente il 13% ne fa uso nel Solitario della Bastiglia.
- *Approfittare della simmetria:* che viene utilizzata abbastanza per quasi tutti i problemi, il 9% degli studenti ne fa uso nel Problema dei Fagioli, il 59% nel Problema dei Cammini, il 41% nel Solitario Triangolare e il 28% nel Solitario della Bastiglia.
- *Utilizzare il ragionamento regressivo:* che viene usata abbastanza per quasi tutti i problemi, il 9% degli studenti ne fa uso nel Problema dei Fagioli, il 25% nel Problema dei Cammini, il 59% nel Solitario Triangolare e il 38% nel Solitario della Bastiglia.

5.3. EFFICACIA DELLE STRATEGIE USATE

Per ogni strategia usata nei diversi problemi e giochi analizziamo l'efficacia di questa come spiegato nel capitolo 4. Raggruppiamo in una tabella, problema per problema, il numero di alunni che ha usato una certa strategia, quello degli studenti che sono arrivati alla conclusione usando quella data strategia e l'indice di esito, ovvero la percentuale di alunni che usando una data strategia arrivano alla conclusione. Ogni problema è stato risolto da un certo numero di studenti, purtroppo inferiore al numero totale di studenti del campione. Per ogni problema è stata calcolata la

percentuale di studenti che hanno raggiunto positivamente la conclusione del problema. Abbiamo deciso che una strategia è risultata efficace se l'indice di esito positivo è maggiore o uguale alla percentuale di studenti che risolvono positivamente il problema dato.

5.3.1. Problema dei Fagioli

Hanno svolto il problema 30 alunni su 32 del campione. Di questi, 16 hanno raggiunto la soluzione del problema (53%).

Strategia	n° alunni che hanno usato la strategia	n° alunni giungono a conclusione	Percentuale di esiti positivi
Risolvere un problema più semplice	3	1	33%
Risolvere problemi simili, analogie	2	1	50%
Seguire un metodo, organizzarsi	13	10	77%
Fare schemi e tabelle	2	1	50%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	24	11	46%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	4	2	50%
Utilizzare un linguaggio algebrico	13	12	92%
Utilizzare diagrammi ad albero	6	5	83%
Approfittare della simmetria	3	2	67%
Dedurre e trarre conclusioni	2	2	100%
Fare congetture sulla soluzione	3	1	33%
Analizzare casi limite	6	2	33%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	3	3	100%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	14	4	29%

Tabella 5.6

Le strategie che risultano efficaci per la risoluzione del Problema dei Fagioli sono:

- Seguire un metodo, organizzarsi (77%)
- Utilizzare un linguaggio algebrico (92%)
- Utilizzare diagrammi ad albero (83%)
- Approfittare della simmetria (67%)
- Dedurre e trarre conclusioni (100%)
- Utilizzare il ragionamento regressivo (100%)

5.3.2. Problema dei Cammini

Hanno svolto il problema 30 alunni su 32 del campione. Di questi, 21 hanno raggiunto la soluzione del problema (70%).

Strategia	n° alunni che hanno usato la strategia	n° alunni giungono a conclusione	Percentuale di esiti positivi
Risolvere un problema più semplice	8	7	88%
Estrarre regolarità, praticare l'induzione	8	7	88%
Risolvere problemi simili, analogie	1	0	0%
Seguire un metodo, organizzarsi	13	8	62%
Fare schemi e tabelle	2	2	100%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	22	15	68%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	16	9	56%
Utilizzare un linguaggio algebrico	1	1	100%
Utilizzare diagrammi ad albero	6	6	100%
Approfittare della simmetria	19	10	53%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	8	7	88%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	3	2	67%

Tabella 5.7

Le strategie che risultano efficaci per la risoluzione del Problema dei Cammini sono:

- Risolvere un problema più semplice (88%)
- Estrarre regolarità, praticare l'induzione (88%)
- Fare schemi e tabelle (100%)
- Utilizzare un linguaggio algebrico (100%)
- Utilizzare diagrammi ad albero (100%)
- Utilizzare il ragionamento regressivo (88%)

Analizzati i protocolli di risoluzione abbiamo deciso di includere nelle strategie efficaci, anche se non raggiungono il 70% di indice di esito, le seguenti due:

- Fare disegni e rappresentazioni grafiche (68%)
- Fare uso delle nozioni apprese di probabilità (67%)

5.3.3. Solitario Triangolare

Hanno svolto il problema 31 alunni su 32 del campione. Di questi, 23 hanno raggiunto la soluzione del problema (74%).

Strategia	n° alunni che hanno usato la strategia	n° alunni giungono a conclusione	Percentuale di esiti positivi
Tentativi ed errori	4	3	75%
Risolvere un problema più semplice	2	2	100%
Scomporre il problema, semplificare	1	1	100%
Risolvere problemi simili, analogie	1	0	0%
Seguire un metodo, organizzarsi	11	10	91%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	16	12	75%
Approfittare della simmetria	13	11	85%
Fare congetture sulla soluzione	2	2	100%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	19	13	68%
Fare tentativi senza una strategia specifica	25	20	80%
Riconoscere il ruolo delle pedine	16	14	88%

Tabella 5.8

Le strategie che risultano efficaci per la risoluzione del Solitario Triangolare sono:

- Tentativi ed errori (75%)
- Risolvere un problema più semplice (100%)
- Scomporre il problema, semplificare (100%)
- Seguire un metodo organizzarsi (91%)
- Fare disegni e rappresentazioni grafiche (75%)
- Approfittare della simmetria (85%)
- Fare congetture sulla soluzione (100%)
- Fare tentativi senza una strategia specifica (80%)
- Riconoscere il ruolo delle pedine (88%)

Analizzati i protocolli di risoluzione abbiamo deciso di includere nelle strategie efficaci, anche se non raggiunge il 74% di indice di esito, la strategia

- Utilizzare il ragionamento regressivo (68%)

5.3.4. Solitario della Bastiglia

Hanno svolto il problema 28 alunni su 32 del campione. Di questi, 4 hanno raggiunto la soluzione del problema (14%).

Strategia	n° alunni che hanno usato la strategia	n° alunni giungono a conclusione	Percentuale di esiti positivi
Tentativi ed errori	2	0	0%
Risolvere un problema più semplice	2	0	0%
Scomporre il problema, semplificare	20	4	20%
Risolvere problemi simili, analogie	4	2	50%
Seguire un metodo, organizzarsi	12	2	17%
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	4	0	0%
Approfittare della simmetria	9	3	33%
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	12	0	0%
Fare tentativi senza una strategia specifica	18	4	22%
Riconoscere il ruolo delle pedine	6	0	0%

Tabella 5.9

Le strategie che risultano efficaci per la risoluzione del Solitario della Bastiglia sono:

- Scomporre il problema, semplificare (20%)
- Risolvere problemi simili, analogie (50%)
- Seguire un metodo organizzarsi (17%)
- Approfittare della simmetria (33%)
- Fare tentativi senza una strategia specifica (22%)

Osservazioni sull'analisi dell'efficacia delle strategie

A seguito di questa analisi possiamo notare che la maggior parte delle strategie che consideriamo efficaci per la risoluzione dei problemi è usata da un numero esiguo di studenti.

Per quanto riguarda il Problema dei Fagioli, la maggior parte degli studenti l'ha interpretato come un esercizio tipico di probabilità, concentrandosi quindi sul calcolo di valori, senza provare a usare altre strategie o usandole ma per poco tempo, senza riuscire quindi a raggiungere la soluzione.

Nel Problema dei Cammini invece le strategie usate hanno una percentuale di esito maggiore o uguale al 53%. Il problema, ritenuto più semplice, è stato risolto positivamente da una percentuale abbastanza alta di studenti.

Nella risoluzione del Solitario Triangolare le strategie usate, eccetto una, hanno una percentuale di esito maggiore o uguale al 68%. Molto probabilmente perché gli studenti hanno avuto più tempo per risolverlo e quindi per ragionarci sopra.

Per quanto riguarda il Solitario della Bastiglia, invece, non si può dire molto, poiché solamente 4 studenti riescono a risolverlo. Come possiamo notare dall'analisi del capitolo 3, alcune strategie che hanno indice di esito pari a 0 (per esempio il ragionamento regressivo) in realtà sono strategie efficaci.

5.4. APPROFONDIMENTO: LA STRATEGIA DEL RAGIONAMENTO REGRESSIVO

Dedichiamo un paragrafo a parte all'analisi della strategia del ragionamento regressivo, parte centrale di questo lavoro di ricerca. Per ogni problema illustreremo come gli studenti hanno utilizzato questa strategia all'interno della risoluzione. Integreremo l'analisi dei due problemi e del Solitario Triangolare con le risposte al questionario 5: *Strategia di iniziare dalla fine e lavorare ragionando regressivamente.*

Il quinto questionario riguardava l'uso della strategia del ragionamento regressivo nella risoluzione dei problemi. I quesiti vertevano sull'utilizzo della strategia in generale e nel problema specifico.

Quesiti Questionario 5: Strategia di iniziare dalla fine e lavorare ragionando regressivamente.

0. La strategia di iniziare dalla fine e lavorare ragionando regressivamente, dalla fine al principio, è molto utile per affrontare situazioni delle quali si conosce l'obiettivo o la meta finale. Indica con che frequenza usi questa strategia.

Ora concentrati nel processo di risoluzione di ogni problema.

1. Per la risoluzione del problema hai utilizzato il ragionamento regressivo o la strategia di iniziare dalla fine e lavorare ragionando regressivamente? Perché? (Analizzare la situazione-problema, avvalorando la convenienza di averlo affrontato a partire dalla fine e spiegare, nel tuo caso, le ragioni del suo uso o non uso)
2. Se non hai utilizzato questa strategia, che tipo di processi consideri che non hai saputo utilizzare nella tua risoluzione che hanno fatto sì che non la usassi? Indica quale o quali di questi:
 - Azioni coinvolte basicamente nella determinazione del modello matematico
 - Conseguimento di condizioni sufficienti
 - Azioni di scoperta
 - Riconoscimento e esplicitazioni del senso di equivalenza nelle rappresentazioni
 - Creazione dell'oggetto soluzione
 - Formulazione di assiomi
 - Caratterizzazione e determinazione di relazioni
 - Conseguimento di giustificazioni di condizioni sufficienti in equivalenze proposizionali

La domanda 0. è stata posta solamente una volta, al termine della risoluzione dei due problemi. Questa era a risposta multipla con le seguenti opzioni:

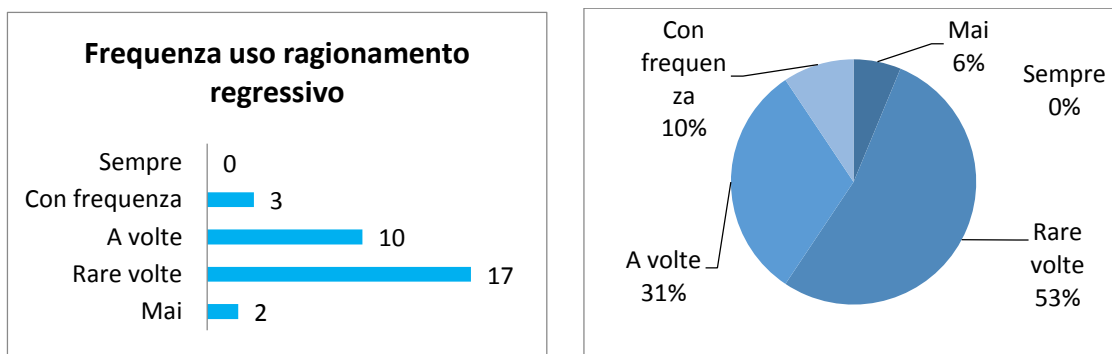
- Mai.
- Rare volte.
- A volte.
- Con frequenza.
- Sempre.

La prima parte della domanda 1. era a risposta obbligata Si/No mentre la seconda parte era a risposta aperta.

Per rispondere alla domanda 2. Bastava, semplicemente, porre una croce accanto a una o più opzioni tra quelle proposte.

Gli alunni totali della classe erano 32, tutti hanno risposto alla domanda 0. Mentre 30 hanno risposto alla parte di questionario riguardante il Problema dei Fagioli e il Problema dei Cammini. Per quanto riguarda il Solitario Triangolare 31 hanno risposto al questionario.

Questi sono i risultati della Domanda 0.



Grafici 5.1

Nessuno studente ha affermato di fare uso, sempre, della strategia di ragionamento regressivo, 3 hanno dichiarato di farne uso con frequenza (10%), 10 a volte (31%), 17 rare volte (53%) e 2 studenti hanno asserito di non farne mai uso (6%).

Al termine di ogni sotto paragrafo riguardante i due problemi e il Solitario Triangolare esplicheremo i risultati relativi alla domanda 1 e alla domanda 2 in riferimento al problema trattato.

5.4.1. Problema dei Fagioli

Nella risoluzione del primo problema analizzato, il Problema dei Fagioli, solamente 3 studentesse fanno uso della strategia del ragionamento regressivo (9%).

Tutte e tre le alunne ne fanno uso dopo essere arrivate alla soluzione, dopo aver costruito la soluzione attraverso una strategia differente, lo scopo del ragionamento regressivo in tutti e tre i casi è provare che il risultato corretto era veramente quello che si aspettavano dopo l'utilizzo della strategia precedente. La soluzione è stata raggiunta correttamente dalle tre studentesse.

1. Paula

Attraverso delle deduzioni logiche, la studentessa arriva ad affermare che il numero di fagioli rossi nel sacco bianco è uguale a quello dei fagioli bianchi nel sacco rosso. Successivamente scrive "Già abbiamo risolto il problema. Ora introduciamo nuove variabili per risolvere il problema come abbiamo cercato di fare al principio, ma adesso già conoscendo il ragionamento". Partendo dal fatto che il numero di fagioli bianchi rimane costante per tutto il problema (2000), e anche il numero di fagioli all'interno del sacco bianco, dopo un numero pari di passaggi di fagioli da un sacco all'altro, continua a rimanere costante (2000), scrive due equazioni che illustrano questa situazione e che, poste in un sistema e risolte, verificano quindi la soluzione ottenuta in precedenza.

$$\begin{cases} 2000 = B_B + B_R & \leftarrow \text{numero de} \\ 2000 = B_B + R_B & \leftarrow \text{numero de} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$B_B + B_R = B_B + R_B \Rightarrow B_R = R_B$$

Figura 5.24

Nel questionario circa l'uso della strategia dichiara di non averla usata perché non sapeva il risultato a cui doveva arrivare.

2. Miriam

È uno dei due casi che sono stati scelti come approfondimento, la studentessa verifica la soluzione ottenuta tramite un diagramma ad albero. Verrà analizzato in dettaglio il suo protocollo all'interno del prossimo capitolo.

Anche lei, come Paula, nel questionario circa l'uso della strategia dichiara di non averla usata. Nella spiegazione del perché afferma "Non ho pensato di iniziare dalla fine, mi sono addentrata in calcoli complessi che non portavano da nessuna parte, credendo ci fosse bisogno di usare probabilità (che non mi piace)."

3. Yaiza

La ragazza, attraverso lo studio di casi limite, giunge all'idea che dovrebbero rimanere lo stesso numero di fagioli bianchi nel sacco rosso che rossi nel sacco bianco. Successivamente scrive "Non so se [il fatto che rimangano lo stesso numero di fagioli] si compie per tutti i casi e mi risulta molto pesante cercare di provare con più casi. Devo cercare di dedurlo matematicamente. Scrive quindi a questo punto due equazioni che, per risolvere, inserisce in un sistema e ottiene effettivamente il risultato.

$$\begin{aligned}
 B &= b_B + b_R & R &= r_B + r_R \\
 \Rightarrow B &= b_B + r_B & R &= r_R + b_r \\
 \Rightarrow B &= b_B + b_r = b_B + r_B \Rightarrow \\
 r_B &= b_r \Rightarrow \text{Hay las mismas}
 \end{aligned}$$

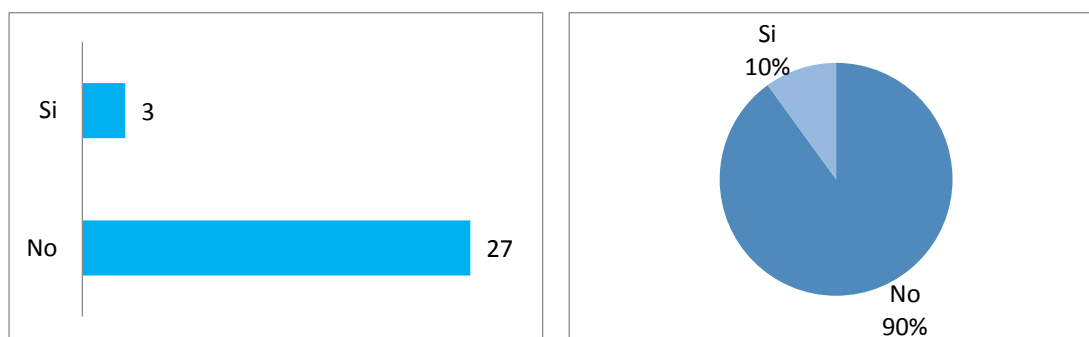
Figura 5.25

Anche lei, come le altre due studentesse, nel questionario circa l'uso della strategia dichiara di non averla usata. Affermando "Non mi venne in mente nessuna strategia specifica per affrontare il problema."

Dall'analisi del quinto questionario risulta che effettivamente 3 studenti hanno risposto di aver utilizzato questa strategia mentre gli altri 27 che non l'hanno utilizzata. I tre studenti che affermano di averla utilizzata però non sono le tre studentesse che, invece, l'hanno effettivamente usata. Nei protocolli dei tre studenti che affermano di averla usata non compare come strategia di risoluzione, neanche accennata nei commenti. Io penso che in generale, non essendo abituati a usare questo tipo di strategia gli studenti non abbiano chiaro cosa significa e quando è utile usarla.

Risultati questionario 5

1. Uso del ragionamento regressivo nel procedimento di risoluzione



Grafici 5.1

3 studenti hanno affermato di avere usato il ragionamento regressivo nella risoluzione del problema (10%), gli altri 27 studenti invece hanno dichiarato di non averla usata (90%).

Dall'analisi delle risposte alla seconda parte della domanda si sono ricavate le motivazioni degli studenti.

Studenti che hanno usato il ragionamento regressivo:

- Sapevo qual era la soluzione
- Perché non mi sono fissato sul risolvere il problema in ordine cronologico
- L'ho usata però non sono arrivato a nulla perché non ho usato una notazione adeguata

Studenti che non hanno usato il ragionamento regressivo:

- Perché ho seguito la risoluzione del problema in modo lineare (9 studenti)
- Ho usato altre strategie (14 studenti)
- Non sapevo la soluzione finale (6 studenti)
- Non sono solito usarla (4 studenti)
- Non ho capito bene il problema (2 studenti)

2. Tipi di processi mancanti

Tipi di processi mancanti:

- Azioni coinvolte basicamente nella determinazione del modello matematico (6 studenti - 19%)
- Conseguimento di condizioni sufficienti (6 studenti - 19%)
- Azioni di scoperta (8 studenti - 25%)
- Riconoscimento e esplicitazioni del senso di equivalenza nelle rappresentazioni (8 studenti - 25%)
- Creazione dell'oggetto soluzione (11 studenti - 34%)
- Formulazione di assiomi (6 studenti - 19%)
- Caratterizzazione e determinazione di relazioni (8 studenti - 25%)
- Conseguimento di giustificazioni di condizioni sufficienti in equivalenze proposizionali (6 studenti - 19%)

5.4.2. Problema dei Cammini

8 studenti (28%) fanno uso della strategia del ragionamento regressivo nella risoluzione del Problema dei Cammini.

Tutti e 8 gli studenti utilizzano questa strategia per costruire la soluzione, con tecniche leggermente differenti.

1. Mercedes

La studentessa inizia a contare i segmenti che collegano il numero 7, ultimo numero del percorso, con i numeri 6. Conta successivamente il numero di segmenti che collegano i numeri 6, ai numeri 5, infine i segmenti che uniscono i 5 ai 4. Cerca di estrarre una formula generale dai numeri ottenuti ma suppone una ricorrenza che non è corretta.

De 7 saleu 3 camminos
De 6 saleu 7 camminos
De 5 saleu 11 camminos
⋮

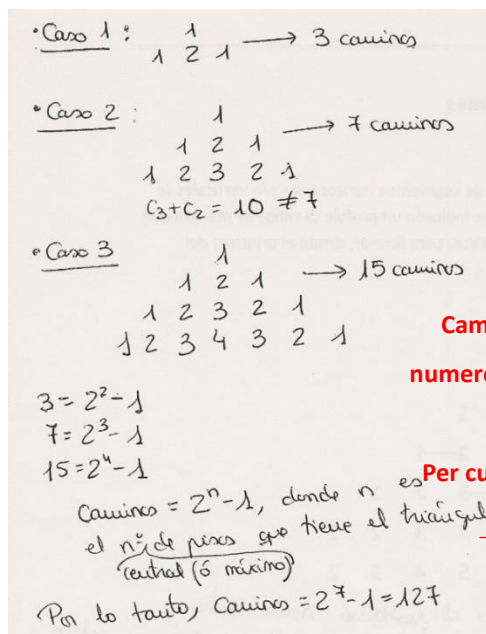
Dal 7 escono 3 cammini
Dal 6 escono 7 cammini
Dal 5 escono 11 cammini

$3 = 2 \cdot 0 + 3$
 $7 = 2 \cdot (2 \cdot 1) + 3$
 $11 = 2 \cdot (2 \cdot 2) + 3$
⋮

Camminos = $2 \cdot (2 \cdot n) + 3 = 4n + 3$

Figura 5.26

Verificando il procedimento ottenuto, analizzando casi più piccoli, ovvero triangoli in cui l'ultimo numero è un 2, un 3, un 4, ecc. si rende conto dell'errore; usando questa verifica e praticando l'induzione (altra strategia) giunge alla formula generale $2^n - 1$ per un generico triangolo con n numero finale dei cammini raggiungendo la soluzione.



Cammini = $2^n - 1$, dove n è il numero centrale (o minimo) di piani che ha il triangolo.
Per cui, cammini = $2^7 - 1 = 127$

Figura 5.27

La studentessa commenta nel questionario sull'uso del ragionamento regressivo: "All'inizio, ho utilizzato questa strategia, ma ho commesso qualche errore nel pensare alla soluzione e ho lasciato da parte l'idea".

2. Marta, Natalia e Paula

Le tre studentesse utilizzano una tecnica molto simile per raggiungere la soluzione. Tutte e tre contano i segmenti che collegano il 7 ai 6, i 6 ai 5, ecc. Natalia descrive cammino per cammino il numero di segmenti mentre Marta e Paula (Figura 28 e 29) si aiutano con un diagramma ad albero. Alla fine arrivano tutte e tre alla conclusione che il numero di cammini si può esprimere come una sommatoria. $\sum_{i=0}^6 2^i$.

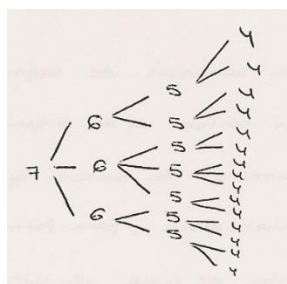


Figura 5.28

$$\text{Realmente es } 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + (2^1 + 2^0) = \sum_{n=0}^6 2^n = 127 \text{ caminos.}$$

Figura 5.29

Marta e Paula commentano nel questionario di aver usato la strategia perché sembrava la più semplice da usare rispetto ad altre strategie mentre Natalia ha risposto che ne ha fatto uso perché c'era un unico 7 per tutte le possibili combinazioni.

3. Alejandro

Lo studente inizia a contare i segmenti come le altre studentesse, partendo dal 7. Decide successivamente di cambiare strategia e di partire dal vertice in alto del triangolo sempre continuando a contare segmenti scendendo man mano lungo il triangolo. Arriva così alla formula generale per induzione $2^n - 1$.

$\text{caminos } 1 = 1$
 $\text{caminos } 2 = 2^0 + 2^0 + \text{camino } 1 = 2 + 1 = 3$
 $\text{caminos } 3 = 2^1 + 2^1 + \dots = 4 + 3 = 7$
 $\text{caminos } 4 = 2^2 + 2^2 + 7 = 2^3 + (2^3 - 1) = 2^4 - 1$
 $\text{caminos } n = 2^n - 1$
caminos 7 = $2^7 - 1$

Figura 5.30

Ritiene che usare questa strategia sia più facile per risolvere questo problema.

4. Jorge e Manuel

Entrambi utilizzano un digramma ad albero con il vertice nel 7, disegnando i vari cammini possibili.

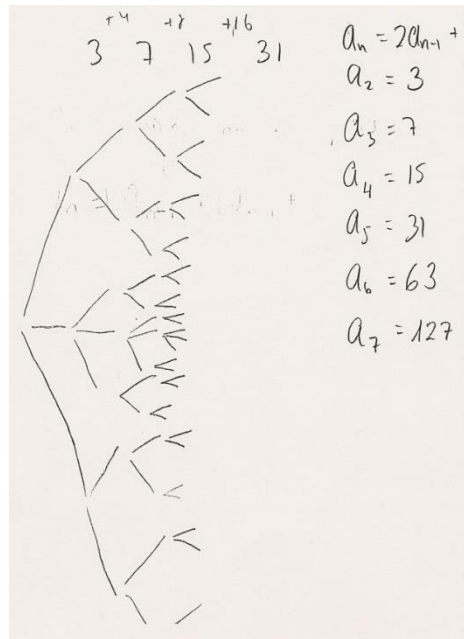


Figura 5.31 (Protocollo di Manuel)

Arrivano entrambi all'espressione per induzione $a_n = 2 * a_{n-1} + 1$ che lega una fila del triangolo alla precedente. Jorge da questa estrae la formula generale $2^n - 1$.

Jorge afferma che ha usato questa strategia perché sapeva esattamente qual era il risultato a cui arrivare, mentre Manuel sostiene che è più conveniente procedere in questo modo rispetto alla maniera lineare.

5. Alicia

Anche la studentessa decide di contare il numero di segmenti partendo dal 7, come i suoi compagni, ma al posto che cercare una formula generale, decide di moltiplicare i numeri che ottiene ai vari livelli e dividerli per $6!$. Capendo di essersi sbagliata nell'interpretazione decide di sfruttare la simmetria del problema: dividere il triangolo in due parti e considerarne solamente una. Comincia a calcolare il numero di cammini a ogni livello partendo dal 1, successivamente interpreta la serie di numeri che appaiono con la formula n^2 , sbagliata anche questa volta.

Salto	→	Cammini
1	→	2
2	→	4
3	→	9
4	→	16
⋮		

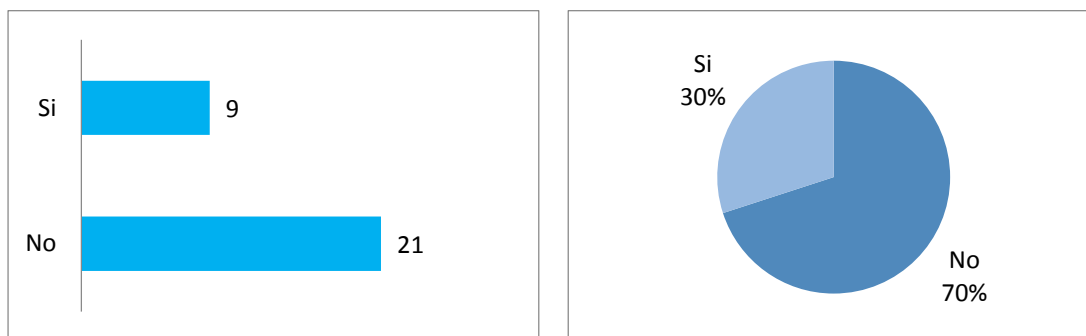
Figura 5.32

Infine considera il numero di segmenti per cammino (6) e scrive quindi la formula finale per il numero di cammini: $6^2 + 6^2 - 1 = 71$.

La studentessa risponde al questionario 5 sostenendo che si era resa conto che qualunque cammino 1234567 può essere visto come un cammino 7654321 e essendoci un unico 7 il procedimento era più corretto usando il ragionamento regressivo.

Risultati del questionario 5

1. Uso del ragionamento regressivo nel procedimento di risoluzione



Grafici 5.2

9 studenti hanno affermato di avere usato il ragionamento regressivo nella risoluzione del problema (30%), 21 studenti hanno dichiarato di non averlo usato (70%).

Dall'analisi delle risposte alla seconda parte della domanda si sono ricavate le motivazioni degli studenti.

Studenti che hanno usato il ragionamento regressivo:

- Mi sembrava più facile risolvere il problema utilizzandolo (5 studenti)
- Sapevo qual era la soluzione (4 studenti)

Studenti che non hanno usato il ragionamento regressivo:

- Perché ho seguito la risoluzione del problema in modo lineare
- Ho usato altre strategie (14 studenti)
- Non sono solito usarla (2 studenti)
- Ho commesso degli errori pensando alla soluzione

2. Tipo di processi mancanti

Tipi di processi mancanti:

- Azioni coinvolte basicamente nella determinazione del modello matematico (5 studenti - 16%)
- Conseguimento di condizioni sufficienti (5 studenti - 16%)
- Azioni di scoperta (4 studenti - 13%)
- Riconoscimento e esplicitazioni del senso di equivalenza nelle rappresentazioni (3 studenti - 9%)
- Creazione dell'oggetto soluzione (7 studenti - 22%)
- Formulazione di assiomi (2 studenti - 6%)
- Caratterizzazione e determinazione di relazioni (6 studenti - 19%)
- Conseguimento di giustificazioni di condizioni sufficienti in equivalenze proposizionali (3 studenti - 9%)

5.4.3. Solitario Triangolare

Nella risoluzione del Solitario Triangolare 19 studenti fanno uso del ragionamento regressivo (59%).

1. 9 studenti

9 studenti semplicemente hanno citato la strategia senza specificare i movimenti delle pedine o se hanno incontrato delle configurazioni vincenti. Risolvendo il problema con

altre strategie fanno dei tentativi con il ragionamento regressivo per poi tornare a strategie differenti o anche solamente a fare tentativi nel senso corretto.

Un esempio è Andrei: “Ho provato la strategia regressiva: supporre che si è arrivati all’obiettivo e costruire all’indietro il modello iniziale del gioco descritto nell’enunciato”

Alcuni degli studenti presi in considerazione rispondono al questionario 5 dicendo che l’hanno usata perché l’hanno trovata più facile. Altri che l’hanno utilizzata ma senza ottenere nessun esito positivo. Una studentessa ha dichiarato che la difficoltà della strategia di ragionamento regressivo è la stessa di quella del percorso lineare, mentre un’altra ha affermato che l’ha usata perché era l’idea venuta fuori all’interno della lezione.

2. Martín, Paula, Pietro

Questi tre studenti descrivono l’uso della strategia, dichiarando però nel frattempo che non è una strategia che semplifica le cose, in generale è la stessa cosa che giocare normalmente, solamente con le regole invertite.

Martín che è uno dei casi approfonditi, la ritiene utile quando cerca di lasciare isolati gli angoli del triangolo. Paula prova a combinare le due strategie, regressiva e non, per ottenere una combinazione vincente iniziando il percorso dell’inizio e dalla fine e trovando un punto d’incontro.

Martín nel questionario 5 segnala che l’idea di usare il ragionamento regressivo si è manifestata all’interno della classe, mentre Paula e Pietro dichiarano che sembra una strategia più facile da usare in questo caso.

3. Natalia

Natalia ha iniziato a giocare usando la strategia di ragionamento regressivo ma la ha abbandonata per fare dei tentativi in modo lineare, questo per alcuni motivi:

- Non sapeva dove collocare la prima pedina, pensò di collocarla in una delle caselle più esterne, in particolare in una delle caselle poste al centro del lato così che potesse avere la possibilità di fare un passo verso l'interno oppure uno (o due) lungo il lato.
- Una volta scelto la casella dove collocare la pedina non sapeva come scegliere il primo passo e come giudicare se fosse buono o meno

Ha deciso quindi di abbandonare il metodo perché le sembrava troppo complicato e ha iniziato a giocare linearmente fino a ottenere una soluzione.

Nel questionario 5 afferma "ho provato a usarla ma non sono stata capace di continuare perché c'erano molte possibilità e non sapevo come limitarle".

4. Miriam

Come detto in precedenza, la studentessa è uno dei casi approfonditi. Verrà descritto in modo dettagliato il suo protocollo di risoluzione nel prossimo capitolo.

5. Elena

La studentessa ha iniziato a risolvere il gioco utilizzando questa strategia perché pensava fosse la più adeguata supposto che conosceva il risultato finale del gioco, ovvero una unica pedina in una casella specifica. Non ottenendo nessun risultato, ha abbandonato la strategia per giocare con le regole normali in modo aleatorio fino a conseguire la soluzione.

6. Inmaculada

La studentessa ha iniziato a giocare al solitario facendo dei tentativi, non ottenendo nessuna soluzione scrive "non riesco a pensare a nessuna regola da seguire, ma è chiaro che non si può giocare senza una tattica" e successivamente "forse una buona strategia è usare la regressione" e ancora "sono quasi sicura che si deve fare iniziando dalla fine, ma così non mi viene, e non riesco a pensare a un modello da seguire". Ha

continuato a provare a risolverlo usando questa strategia fino a raggiungere la configurazione della figura 33 in cui manca una unica pedina da collocare.

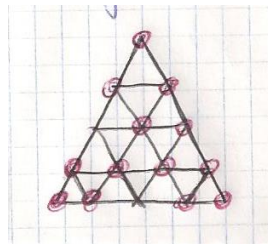


Figura 5.33

Successivamente afferma: “Iniziando dalla fine non sto ottenendo nulla, quindi torno alla strategia di iniziare con 14 pedine e andare avanti togliendole.” E continua “Dopo molte prove in cui appunto i numeri delle pedine che muovo, seguendo l’unica strategia di cercare di lasciare il minor numero di pedine isolate sono arrivata alla soluzione.”

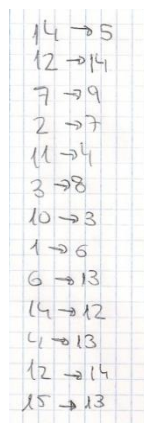


Figura 5.34

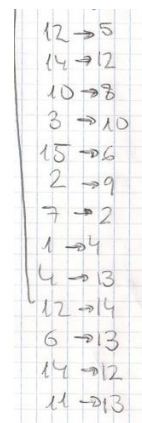


Figura 5.35

E conclude con “siccome il tavolo da gioco è simmetrico mi rendo conto che c’è una soluzione totalmente analoga a questa, ma simmetrica.”

Nel questionario sulla strategia di ragionamento regressivo descrive il processo da lei utilizzato e aggiunge che ha deciso di utilizzare la strategia di ragionamento regressivo perché continuando a risolverlo in modo lineare le risultava difficile, ma poi utilizzando questo metodo, “anche se poteva risultare il più adeguato per questo tipo di

problema”, sempre non riusciva a porre due pedine sul tavolo da gioco. Così ha deciso di abbandonarlo.

7. Judit, Marcos, Laura

Nella risoluzione tutti e tre gli studenti hanno disegnato i vari movimenti delle pedine attraverso una serie di triangoli di gioco stilizzati. Hanno iniziato la risoluzione facendo dei tentativi aleatori usando le regole standard del gioco fino a quando non hanno provato a usare la strategia di ragionamento regressivo.

Judit ha fatto diversi tentativi cercando di essere sistematica con la pedina nella posizione 1 “siccome gli angoli sono [le posizioni] peggiori” e quindi suppone che l’ultima pedina rimanga lì “incastrata”. Successivamente ha provato a spostare la pedina iniziale in una delle posizioni in mezzo a uno dei lati ma non ha ottenuto la soluzione in nessun caso.

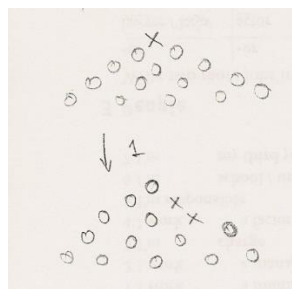


Figura 5.36

Marcos e Laura hanno fatto dei tentativi aleatori con la strategia di ragionamento regressivo. Marco iniziando con la pedina nella posizione 7 e Laura nella posizione 5 (Figura 21) e successivamente nella 13 (Figura 37) ma non ottenendo nulla sono tornati ad usare le regole standard fino ad ottenere una soluzione.

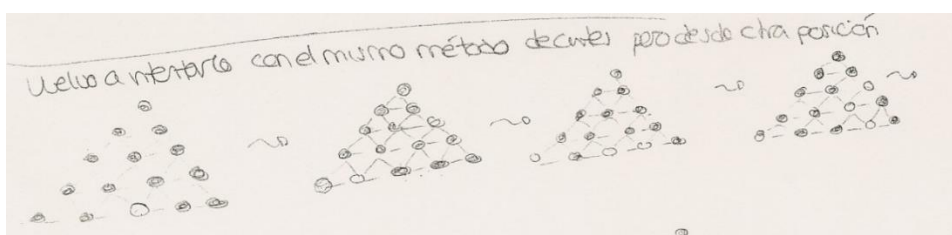
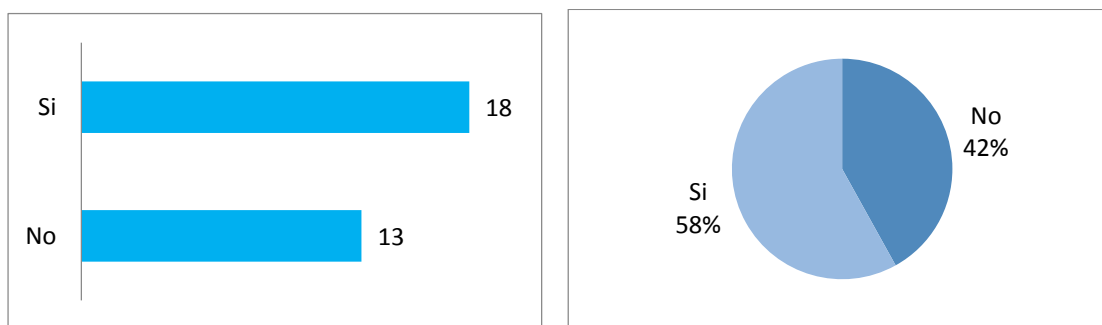


Figura 5.37

Tutti e tre rispondono positivamente al questionario sull'uso del ragionamento regressivo. Judit afferma che l'idea della strategia di ragionamento regressivo le è venuta perché in classe se ne era già parlato per altre attività, ma non ottenendo nulla "mi sono disperata e ho deciso di lasciare il problema". Marcos afferma che l'ha usata perché si poteva vedere sul tavolo da gioco dove rimaneva la pedina vincitrice. Laura invece afferma che l'ha usata ma non ha ottenuto nulla e ha cercato una soluzione aleatoria perché non ha trovato un metodo matematico adeguato per calcolarla.

Risultati del questionario 5

1. Uso del ragionamento regressivo nel procedimento di risoluzione



Grafici 5.3

18 studenti hanno affermato di avere usato il ragionamento regressivo nella risoluzione del gioco (58%), gli altri 13 studenti hanno dichiarato di non averlo usato (42%).

Dall'analisi delle risposte alla seconda parte della domanda si sono ricavate le motivazioni degli studenti.

Studenti che hanno usato il ragionamento regressivo:

- Mi sembrava più facile risolvere il problema utilizzandolo (6 studenti)
- Sapevo qual era la soluzione (6 studenti)
- Ho pensato che usare il ragionamento regressivo potesse essere più facile ma alla fine mi è parso uguale, come se fosse un altro gioco simmetrico con distinte regole ma con la stessa difficoltà (3 studenti)

- Perché era un'idea che qualcuno ha detto in classe (2 studenti)
- L'ho usata però non sono giunto a nulla (5 studenti)

Studenti che non hanno usato il ragionamento regressivo:

- Perché ho seguito la risoluzione del problema in modo lineare (2 studenti)
- Ho usato altre strategie (5 studenti)
- Non sapevo la soluzione finale
- Non sono solito usarla (2 studenti)
- Non sapevo come usarla

2. Tipo di processi mancanti

Tipi di processi mancanti:

- Azioni coinvolte basicamente nella determinazione del modello matematico (10 studenti - 31%)
- Conseguimento di condizioni sufficienti (6 studenti - 19%)
- Azioni di scoperta (7 studenti - 22%)
- Riconoscimento ed esplicitazioni del senso di equivalenza nelle rappresentazioni (4 studenti - 13%)
- Creazione dell'oggetto soluzione (5 studenti - 16%)
- Formulazione di assiomi (8 studenti - 25%)
- Caratterizzazione e determinazione di relazioni (7 studenti - 22%)
- Conseguimento di giustificazioni di condizioni sufficienti in equivalenze proposizionali (5 studenti - 16%)

5.4.4. Solitario della Bastiglia

Nella risoluzione del Solitario della Bastiglia 12 studenti fanno uso del ragionamento regressivo (38%).

1. Martín e Elena

Martín e Elena concentrano la risoluzione sull'uso del ragionamento regressivo, il loro protocollo di risoluzione verrà approfondito nel prossimo capitolo.

2. Andrei e Jorge, Marcos e Ignacio, David e Blanca

Queste tre coppie solamente affermano di aver usato la strategia di ragionamento regressivo senza specificare passaggi o posizioni vincenti.

3. Paula e Natalia

Le due studentesse, dopo alcuni tentativi decidono di essere sistematiche e provare a liberare i bracci della croce. A questo punto si chiedono quale configurazione di pedine, nella quale sono occupate solamente le caselle centrali, permette di arrivare alla conclusione. Per rispondere a questo quesito decidono di usare la strategia di ragionamento regressivo. Realizzano qualche tentativo e, non ottenendo una configurazione nella quale ci sono solamente pedine nel quadrato centrale, decidono di tornare alle regole standard cercando questa volta di liberare prima di tutto i bordi del tavolo da gioco. Fanno vari tentativi ma non riescono ad arrivare a una conclusione.

4. Yaiza e Belèn

Le due studentesse decidono di iniziare la risoluzione del gioco con la strategia del ragionamento regressivo. Scrivono nel protocollo "Per prima cosa abbiamo cercato di utilizzare il metodo regressivo. Sappiamo che l'ultimo movimento deve essere del tipo 15-17 (o l'equivalente in un altro ramo, essendo simmetrico). Il penultimo movimento sarà del tipo 4-16 o 28-16, ma la mia compagna mi ha ricordato che potrebbe anche essere 18-16."

A questo punto, decidono di provare ad usare altre strategie. Provano a risolverlo linearmente ma, cercando di arrivare a una configurazione in cui "la fila e la colonna centrale non rimangano vuote", perché hanno la consapevolezza che l'ultimo movimento dovrà essere del tipo 15-17 come spiegato anteriormente. Dividono il tavolo da gioco in due metà secondo una delle diagonali e provano a svuotarne prima una e poi l'altra. Non arrivano però alla soluzione.

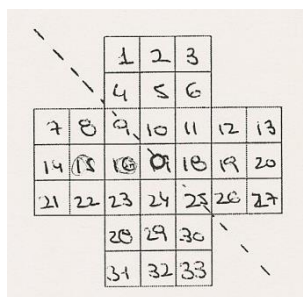


Figura 5.38

Considerazioni sull'uso del ragionamento regressivo

Dall'analisi dell'utilizzo della strategia del ragionamento regressivo possiamo riassumere dove gli studenti hanno utilizzato la strategia:

- In tutti e quattro i problemi (1 studente)
- Nel Problema dei Cammini e nei due solitari (2 studenti)
- Nel Problema dei Fagioli e nel Solitario Triangolare (1 studente)
- Nel Problema dei Fagioli e nel Solitario della Bastiglia (1 studente)
- Nel Problema dei Cammini e nel Solitario Triangolare (1 studente)
- In entrambi i solitari ma non nei problemi (4 studenti)
- Solo nel Problema dei Cammini (3 studenti)
- Solo nel Solitario Triangolare (8 studenti)
- Solo nel Solitario della Bastiglia (3 studenti)

Vogliamo capire quali strategie vengono utilizzate in contemporanea a quella del ragionamento regressivo. Per farlo abbiamo creato la tabella 5.10. Gli studenti che utilizzano questa strategia, come visto nel paragrafo 1 di questo capitolo, sono 3 per il Problema dei Fagioli, 9 per quello dei Cammini, 17 per il Solitario Triangolare e 12 per quello della Bastiglia. I valori visualizzati nella tabella sono le percentuali relative al numero di studenti che utilizzano una data strategia, tra quelli che praticano il ragionamento regressivo.

Strategie	Problem Fagioli	Problem Camm.	Solitario Triang	Solitario Bastiglia
Tentativi ed errori	-	-	-	-
Risolvere un problema più semplice	33%	33%	-	17%
Scomporre il problema, semplificare	-	-	5%	83%
Estrarre regolarità, praticare l'induzione	-	-	-	-
Risolvere problemi simili, analogie	-	-	5%	8%
Seguire un metodo, organizzarsi	100%	22%	37%	75%
Fare schemi e tabelle	33%	-	-	-
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	66%	78%	58%	8%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	33%	11%	-	-
Utilizzare un linguaggio algebrico	100%	-	-	-
Utilizzare diagrammi ad albero	33%	44%	-	-
Approfittare della simmetria	33%	22%	-	33%
Dedurre e trarre conclusioni	33%	-	-	-
Fare congetture sulla soluzione	-	-	5%	-
Analizzare casi limite	33%	-	-	-
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	-	-	-	-
Fare tentativi senza una strategia specifica	-	-	84%	33%
Riconoscere il ruolo delle pedine	-	-	53%	8%

Tabella 5.10

Osservando questa tabella possiamo fare alcune considerazioni:

- *Seguire un metodo, organizzarsi e Fare disegni e rappresentazioni grafiche* vengono utilizzate contemporaneamente al ragionamento regressivo da un'alta percentuale di alunni nella risoluzione di tutti e quattro i problemi.

- *Risolvere un problema più semplice e Approfittare della simmetria* vengono utilizzate contemporaneamente al ragionamento regressivo da una modesta percentuale di alunni nella risoluzione dei due problemi e in quella del Solitario della Bastiglia.
- *Fare uno studio sistematico di tutti i casi e Utilizzare diagrammi ad albero* vengono utilizzate contemporaneamente al ragionamento regressivo da una modesta percentuale di alunni nella risoluzione dei due problemi.
- *Scomporre il problema, Risolvere problemi simili, Fare tentativi senza una strategia specifica e Riconoscere il ruolo delle pedine* vengono utilizzate contemporaneamente al ragionamento regressivo da un'alta percentuale di alunni nella risoluzione dei due solitari.

Per quanto riguarda l'analisi dei questionari invece, in generale, dall'analisi delle risposte alla domanda 0., abbiamo potuto notare che gli studenti non sono soliti usare la strategia del ragionamento regressivo. Per quanto riguarda il suo utilizzo nell'ambito degli esercizi proposti, abbiamo invece potuto osservare che la percentuale degli studenti che ne usufruiscono per la risoluzione cresce con lo svolgimento dei problemi. Nella risoluzione del Problema dei Fagioli solamente il 13% dichiara di averla usata, nel Problema dei Cammini il 31% e nella risoluzione del Solitario Triangolare il 56%. C'è una discrepanza tra le percentuali dichiarate dagli studenti e quelle che sono frutto dell'analisi dei protocolli. Questa è dovuta al fatto che, per i primi due problemi, due studenti, uno nel questionario relativo al primo problema, l'altro nel questionario relativo al secondo, dichiarano di averla usata ma nei protocolli non compare. Nel caso invece del Solitario Triangolare la percentuale nei protocolli risulta essere più alta di quella dichiarata, forse perché hanno delle difficoltà ad identificare questa strategia come tale.

Per coloro che hanno utilizzato questa strategia spiccano due motivazioni: l'una che sembrava una via più semplice per la risoluzione e l'altra quella di vedere, effettivamente, la soluzione. Per chi non l'ha utilizzata risaltano queste motivazioni: che si sia seguito il processo in modo lineare e che si sia preferito l'uso di altre soluzioni.

Mentre il tipo di procedimento che è mancato di più sembra essere la creazione dell'oggetto soluzione per il Problema dei Fagioli (38%) e per quello dei Cammini (22%) e la determinazione di un modello matematico per la risoluzione del Solitario Triangolare (34%).

5.5. CONCLUSIONI ALL'ANALISI GENERALE DEL GRUPPO DI STUDIO

Terminata l'analisi generale delle strategie utilizzate dal gruppo di studio possiamo evidenziare alcuni risultati che consideriamo importanti. Suddividiamo questi risultati in base a dove vengono usate le strategie, ovvero quelle usate solamente nella risoluzione dei problemi, quelle usate solamente in quella dei giochi e quelle che vengono utilizzate sia nella risoluzione dei problemi che in quella dei solitari.

Strategie utilizzate solamente nella risoluzione dei problemi

Alcune strategie non sono state sviluppate dagli studenti nella risoluzione dei solitari ma solamente in quella dei problemi. Ricordiamo che alcuni giochi sono più adatti di altri per sviluppare determinate strategie. La scelta dei solitari è stata dettata dall'obiettivo della sperimentazione, ovvero valutare se, proponendo la risoluzione di giochi di strategie e problemi che permettono una risoluzione con l'uso del ragionamento regressivo, questo sarebbe stato sviluppato maggiormente negli uni o negli altri. Le strategie che vengono sviluppate solamente nella risoluzione dei problemi risultano essere:

- *Sperimentare ed estrarre regolarità, praticare l'induzione*
- *Fare schemi e tabelle*
- *Studio sistematico di tutti i casi*
- *Utilizzare un linguaggio algebrico*
- *Utilizzare diagrammi ad albero*

- *Dedurre e trarre conclusioni*
- *Analizzare casi limite*
- *Fare uso delle nozioni apprese di probabilità*

Dall'analisi dei protocolli di risoluzione sono emersi due fatti che vogliamo evidenziare perché riteniamo importanti.

1. Uso della probabilità nel Problema dei Fagioli

Il Problema dei Fagioli è stato interpretato come un problema di probabilità dalla maggior parte degli studenti che hanno cercato di usare in modo considerevole le nozioni apprese nelle lezioni della materia. Molto probabilmente il fatto che si operasse su oggetti di diverso colore contenuti in sacchi ha scatenato nelle loro menti l'associazione con i quesiti tipici degli esercizi proposti nelle lezioni di probabilità. Il 44% degli studenti infatti nel questionario 4 afferma di aver visto in precedenza un problema strettamente correlato con questo. Due studenti tra questi hanno aggiunto un commento alla risposta affermando che il problema simile riguardava l'estrazione di palline colorate da alcune urne, problema visto nel corso di probabilità. 9 tra gli studenti che rispondono di aver avuto un'idea per iniziare il problema dichiara che quest'idea era utilizzare delle nozioni di probabilità. Il fatto che si "dovesse" fare uso della probabilità è stato un aspetto negativo che ha demoralizzato la maggior parte degli studenti. Hanno arricchito i protocolli di risoluzione con commenti negativi sul presupposto che dovessero fare uso di quelle nozioni apprese ma in parte dimenticate, che non piacevano e che non avevano capito bene.

Questi alcuni commenti:

"Penso che è un problema di probabilità (materia della quale ho una certa "mania"). [...] E non so continuare. Mi sono bloccata perché non ricordo le formule di probabilità." – Mercedes

“BLOCCO! Penso che c’è bisogno di usare probabilità per risolverlo, e siccome non mi piace non so da dove iniziare.” – Miriam

“Non è niente di più che l’esercizio tipico con le palline in un sacco e dato che non mi piace la probabilità, e non me la ricordavo o non volevo ricordarla, decisi di passare all’altro esercizio [Problema dei Cammini].” – Javier

Il dato che la probabilità abbia un così grande impatto negativo fa sì che la maggior parte degli studenti abbia delle difficoltà nella risoluzione del Problema dei Fagioli rispetto alla risoluzione del Problema dei Cammini. Dall’analisi del questionario 4 risulta infatti che il 74% degli studenti lo ritiene un problema difficile, contro il 56% del Problema dei Cammini. Il 53% comunque riesce a terminarlo in modo corretto.

2. *Risolvere un problema più semplice e Estrarre regolarità, praticare l’induzione nel Problema dei Cammini*

Anche se *Risolvere un problema più semplice* non è tra le strategie che vengono utilizzate solamente nella risoluzione dei problemi, vorremmo sottolineare una questione importante. Nel Problema dei Cammini, 7 studenti degli 8 che hanno ridotto l’ordine del triangolo e hanno cercato di risolvere il problema più semplice creatosi, sono giunti successivamente, praticando l’induzione su ordini sempre maggiori, alla soluzione esplicitando la formula generale $2^n - 1$. Possiamo notare che queste due strategie sono fortemente collegate tra loro. Potendo ridurre le dimensioni del problema, gli studenti riescono a trovare una base per il processo induttivo che li porta all’esplicitazione di una formula generale. L’unico studente che è arrivato alla formula generale senza semplificare il problema ha praticato l’induzione estrapolando la regolarità dallo studio di un diagramma ad albero.

Strategie utilizzate solamente nella risoluzione dei solitari

La stessa osservazione che abbiamo fatto per i giochi in precedenza la possiamo fare anche per i problemi. A seconda di come è strutturato un problema vengono sviluppate nella sua risoluzione maggiormente delle strategie rispetto ad altre. Anche

in questo caso la scelta che abbiamo fatto è stata dettata dal conseguimento dell'obiettivo di investigazione, quindi sono stati privilegiati dei problemi la cui risoluzione portasse principalmente allo sviluppo del ragionamento regressivo. Le strategie che sono state sviluppate solamente nella risoluzione dei solitari sono:

- *Tentativi ed errori*
- *Scomporre il problema in problemi più piccoli, semplificare*
- *Fare tentativi senza una strategia specifica*
- *Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco*

Vorremmo fare alcune osservazioni sul *Fare tentativi senza una strategia specifica*.

Un'alta percentuale di studenti, il 78% per il Solitario Triangolare e il 56% per il Solitario della Bastiglia, durante l'elaborazione del quesito ha intrapreso tentativi senza una strategia specifica. Abbiamo visto che, come afferma De Guzmán (1984), nella prima parte della risoluzione di un gioco, ovvero nella parte di *Familiarizzazione con il gioco*, è normale e positivo che gli studenti inizino a giocare provando ad arrivare a una soluzione senza utilizzare una strategia specifica. (Si veda capitolo 1) Nei protocolli di molti studenti però risulta essere l'unica strategia usata per ottenere la soluzione del gioco.

In particolare tra il 78% degli alunni (25 studenti) che ne hanno fatto uso per il Solitario Triangolare:

- Il 12% (4 studenti) ha anche utilizzato strategie diverse dal ragionamento regressivo, in modo adeguato, mentre
- Il 50% (16 studenti) ha anche provato a giocare iniziando dalla fine, ma senza cercare posizioni vincitrici, solamente provando a risolverlo al contrario senza una strategia specifica
- Il 16% (5 studenti) ha fatto solamente dei tentativi senza usare una strategia fino a che non ha raggiunto la soluzione

Tra il 56% (18 studenti) che ne hanno fatto uso per il Solitario della Bastiglia:

- Il 37% (12 studenti) ha anche utilizzato strategie diverse dal ragionamento regressivo, in modo adeguato
- Il 13% (4 studenti) ha anche provato a giocare iniziando dalla fine, ma senza cercare posizioni vincitrici, solamente provando a risolverlo al contrario senza una strategia specifica
- Il 6% (2 studenti) ha fatto solamente dei tentativi senza usare una strategia fino a che non ha raggiunto la soluzione

L'alta percentuale di studenti che non utilizzano nessuna strategia specifica per la risoluzione o che hanno applicato il ragionamento regressivo, ma senza ulteriori accorgimenti (65% nel Solitario Triangolare e 19% in quello della Bastiglia) è un dato abbastanza significativo. Potrebbe infatti dimostrare una carenza di abilità strategiche negli studenti intervistati.

Strategie utilizzate nella risoluzione di tutti e quattro i problemi

Alcune strategie sono state sviluppate nella risoluzione di tutti e quattro i problemi. È questo il caso di:

- *Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice*
- *Risolvere problemi simili, analogie*
- *Seguire un metodo, organizzarsi*
- *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*
- *Approfittare della simmetria*
- *Partire dalla fine, supporre il problema risolto*

Considerando le percentuali della tabella 5.5 possiamo osservare che:

Iniziare con qualcosa di facile, risolvere un problema più semplice e Fare disegni e rappresentazioni grafiche vengono sviluppate maggiormente nella risoluzione dei problemi che in quella dei solitari.

Seguire un metodo, organizzarsi e Approfittare della simmetria vengono sviluppate nei quattro problemi con percentuali molto simili.

Risolvere problemi simili, analogie e Partire dalla fine, supporre il problema risolto vengono sviluppate maggiormente nella risoluzione dei due solitari che in quella dei problemi.

Anche in questo caso evidenziamo dei risultati importanti:

1. Il calo nello sviluppo della strategia *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*

La percentuale degli studenti che fanno disegni e rappresentazioni grafiche scende gradualmente passando dalla risoluzione dei problemi a quella dei giochi. La possibilità di usare un tavolo da gioco vero o in sua assenza un sostituto fatto da un disegno stilizzato e delle palline di carta fa sì che meno studenti sentano il bisogno di disegnare la situazione e aiutarsi con immagini scritte durante la risoluzione. Da notare la percentuale molto bassa dell'uso di rappresentazioni grafiche nella risoluzione del Solitario della Bastiglia che è stato proposto nell'aula informatizzata con la possibilità di giocare su una pagina web.

2. Lo sviluppo maggiore della strategia del *Ragionamento regressivo* nei giochi di strategia

Anche se gli studenti affermano che non sono soliti usare questa strategia, osservando la tabella 5.5 si può notare chiaramente il progressivo aumento nello sviluppo del ragionamento regressivo passando dalla risoluzione dei problemi a quella dei giochi. Mentre nel Problema dei Fagioli, ritenuto più difficile, solamente il 9% degli studenti la utilizza, nel Problema dei Cammini la sviluppa già il 25%. La percentuale cresce visibilmente nella risoluzione dei due solitari, 59% in quello Triangolare e 38% in quello della Bastiglia.

Dall'analisi più approfondita che abbiamo fatto del ragionamento regressivo, invece, possiamo osservare che nonostante la percentuale di utilizzo cali dal passare dal Solitario Triangolare a quello della Bastiglia, sembra che la strategia abbia avuto un transfert da un solitario all'altro. Infatti il 22% degli studenti del gruppo la utilizza in entrambi i giochi. Osservando invece la tabella 5.10 possiamo notare che, tra gli studenti che usano il metodo di iniziare dalla fine, un'alta percentuale utilizza anche in contemporanea le strategie *Seguire un metodo, organizzarsi e Fare disegni e rappresentazioni grafiche*. Vediamo come questi dati creino una connessione tra le strategie. Lo sviluppo contemporaneo di queste strategie può significare che l'utilizzo di disegni e rappresentazioni grafiche e l'organizzazione del lavoro favorisce lo sviluppo del ragionamento regressivo. A seconda della struttura del problema ci sono anche altre strategie che possono aiutare lo sviluppo di quest'ultima o che vengono utilizzate in combinazione con questa per giungere alla soluzione, troviamo questo caso nella risoluzione dei due solitari di *Scomporre il problema, semplificare*.

Le difficoltà maggiori che sembrano avere avuto gli studenti, nell'uso di questa strategia, sono la creazione dell'oggetto soluzione per quanto riguarda i due problemi e la determinazione di un modello matematico per quanto riguarda la risoluzione dei solitari.

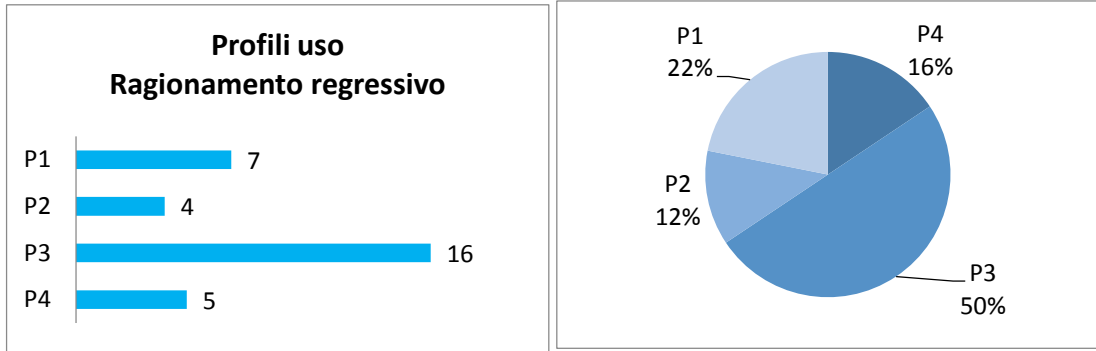
Con questa analisi approfondita si sono potuti suddividere quindi gli studenti in 4 profili:

P1. Studente che utilizza il ragionamento regressivo in problemi e giochi

P2. Studente che utilizza il ragionamento regressivo solamente nella risoluzione dei problemi

P3. Studente che utilizza il ragionamento regressivo solamente nella risoluzione dei giochi

P4. Studente che non lo utilizza affatto



Grafici 5.4

CAPITOLO 6

ANALISI APPROFONDATA DEI PROTOCOLLI DI RISOLUZIONE: STUDIO DI CASO

I due studenti che sono stati scelti per lo studio approfondito dei protocolli di risoluzione sono due alunni, rispettivamente, di 23 e 27 anni, frequentanti il quarto anno degli studi del Grado en Matemáticas. Per questioni di privacy abbiamo deciso di dare loro due nomi fittizi, li chiameremo Miriam e Martín.

Abbiamo scelto questi studenti, per un approfondimento, perché ci è sembrato molto interessante il loro lavoro nella risoluzione dei problemi e soprattutto lo sviluppo e lo sforzo che hanno impiegato nel descrivere i pensieri e i processi mentali di ragionamento all'interno del protocollo di risoluzione.

I due casi sono molto interessanti perché svolgono le attività proposte in modo completamente diverso. Miriam redige dettagliatamente il protocollo di risoluzione nel corso dell'attività. Nel farlo utilizza prevalentemente le immagini che, come vedremo, avranno per lei un ruolo fondamentale nel raggiungimento della soluzione. Martín invece, durante l'attività non redige alcun tipo di protocollo, preferendo concentrarsi sullo svolgimento e dedicandosi in un secondo momento ad una descrizione chiara e concisa senza l'uso di immagini.

Entrambi gli studenti esercitano un controllo continuo sul proprio processo di risoluzione. Dopo aver iniziato ad usare una strategia, infatti, riflettono continuamente sui passaggi eseguiti nella risoluzione e sono in grado di modificarla leggermente o addirittura di cambiarla completamente per riuscire ad arrivare alla risoluzione.

Per quel che riguarda l'uso della strategia del ragionamento regressivo, sono stati inseriti in due profili differenti. Miriam fa parte del primo profilo ovvero è una studentessa che ha utilizzato la strategia del ragionamento regressivo sia nella

risoluzione dei problemi che in quella dei giochi di strategia. Martín invece fa parte del terzo profilo ovvero è uno studente che ha utilizzato la suddetta strategia solamente nella risoluzione dei giochi di strategia (si veda capitolo 5). Approfondiremo in questa analisi l'uso di questa tecnica da parte degli studenti. Vedremo come, in particolare, l'uso della strategia da parte della studentessa nella risoluzione del problema dei Fagioli sia inconscia, mentre entrambi la utilizzino in modo consapevole nella risoluzione dei giochi.

Per svolgere uno studio più approfondito dei protocolli cercheremo di utilizzare tutte e tre le metodologie di analisi esposte nel capitolo 2. Verranno comunque impiegate principalmente la Finer Logic of Inquiry Model (FLIM) elaborata dal professor Arzarello e il Modello di Habermas con alcuni approfondimenti utilizzando quello di Toulmin.

Ci concentreremo, in particolare, nella relazione tra le componenti della razionalità del Modello di Habermas e le fasi della risoluzione descritte dalla FLIM. Ci concentreremo sui diversi strumenti comunicativi che utilizzano gli studenti nella risoluzione e nelle modalità di controllo dei procedimenti seguiti. Una particolare attenzione sarà data alle strategie utilizzate e quindi alla componente teleologica.

Per quanto riguarda l'analisi mediante la FLIM, nei commenti posti sotto le immagini o nelle trascrizioni tra parentesi quadre, l'azione compiuta e la sua modalità saranno scritti in corsivo sottolineato, mentre la relativa componente, dichiarata all'interno dei commenti tra le trascrizioni, in grassetto corsivo. I commenti riguardanti il modello di Habermas saranno posti in alcuni punti significativi del protocollo tra parentesi graffe e si riferiranno alla parte di protocollo appena analizzata. All'interno di questi ultimi verranno specificate (in corsivo) le componenti rilevate.

Entrambi i colloqui individuali sono stati videoregistrati. Nell'analisi utilizzeremo solamente la videoregistrazione del colloquio di Miriam. Per quanto riguarda Miriam seguiremo in modo cronologico il colloquio e intercaleremo parti del discorso registrato (che saranno trascritte con carattere *Batang*) con parti dei protocolli di risoluzione (che saranno trascritte con *carattere Lucida Calligraphy*), perché questo modo di procedere ci sembra più chiaro e completo. Per quanto riguarda

l'analisi di Martín, non utilizzando la videoregistrazione del colloquio individuale, procederemo in ordine cronologico seguendo la stesura dei suoi protocolli. Approfondiremo inoltre una parte del suo protocollo del Solitario della Bastiglia arricchendolo con le trascrizioni della videoregistrazione raccolta durante la lezione in cui è stata proposta l'attività. Anche in questo caso le trascrizioni delle produzioni scritte verranno fatte con *carattere Lucida Calligraphy*, mentre quella del video con carattere Batang. Nell'analisi di entrambi gli studenti inseriremo anche alcuni commenti riguardanti i collegamenti con le loro risposte al questionario 3 (Autoritratto Euristico). Perché le frasi dei loro discorsi siano più comprensibili al lettore, aggiungeremo, all'interno delle trascrizioni, parole tra parentesi quadre. Le immagini e le trascrizioni del protocollo di risoluzione saranno incorniciate in una casella, con sfondo colorato, in modo da evidenziarle rispetto al resto del lavoro di analisi. Al termine di ogni problema verrà schematizzata l'analisi fatta tramite due tabelle.

Verranno specificate durante l'analisi le distinte fasi del processo euristico secondo la suddivisione che troviamo nel libro di Gómez-Chacón (1992). (Si veda il capitolo 1)

6.1. PRIMO STUDIO DI CASO: MIRIAM

Dall'analisi delle sue risposte ai questionari attitudinali risulta che è interessata ai giochi da tavola e non a quelli al computer. Fa parte quindi del secondo profilo: *studente interessato ai giochi che non pratica quelli più tecnologici*. (Si veda capitolo 4)

Per quanto riguarda il secondo questionario osserva che secondo lei gli uomini sono più ingegnosi quando si tratta di sopravvivenza. È completamente d'accordo con l'uso dei giochi nella didattica della matematica e sostiene che "qualunque area della matematica è più divertente e si apprende più facilmente con l'uso dei giochi". Viene quindi inserita nel primo profilo: *studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica e con un alta opinione sugli stessi*. Dalla combinazione di questi due profili risulta far

parte della categoria GF: *giocatori favorevoli all'uso dei giochi nella didattica*. (Si veda capitolo 4)

La prima domanda che è stata posta alla studentessa durante il colloquio individuale era finalizzata a capire le impressioni generali della studentessa sulla risoluzione dei problemi. La sua risposta è stata:

Quando date questi problemi... Non hanno nulla a che vedere con quello che abbiamo fatto nella carriera [universitaria] quindi all'inizio pensi: "che facile, lo saprò risolvere". Quando ti inserisci un po' di più nel problema... Io sono andata all'altro estremo: "che difficile! Mi sono dimenticata come si faceva questo, come si pensava". Se non mi dai una linea guida [costituita da] teorema, corollario... Non lo so fare.

Video 1.1 - [MVI_0803] (minuti 0.38-1.02)

La studentessa, in questi pochi secondi, sottolinea il fatto che questi tipi di problemi non vengono proposti dagli insegnanti durante la carriera universitaria e che quindi le capacità apprese nella loro risoluzione nei livelli di scuola inferiore sono sopite o addirittura sono state dimenticate. Interessante, in merito a questo discorso, è la sua risposta alla prima domanda del questionario 3 (Metete e Obiettivi) dove la studentessa scrive:

"Mi è sempre piaciuto mettermi alla prova, competere, scoprire, arrivare a conoscere cose impossibili per altre persone perché manca, da parte loro, la pazienza. In questo momento questa voglia di sapere e di superare me stessa è stata sostituita dall'unico obiettivo di finire gli studi, siccome durante la carriera [universitaria] tutto quello che prima mi appassionava (cioè pensare) la maggior parte delle volte non è stato premiato, mentre lo sono stati memorizzare e ricordare, cose che non apportano niente al mio sviluppo mentale."

Sembra che sottolinei, con queste due risposte in tempi diversi, la differenza tra l'apprendimento del livello universitario e quello dei livelli di scuola inferiore. Dalle sue risposte traspare un po' la delusione per la mancanza di approcci tramite la risoluzione di problemi anche a livello universitario.

E continua il discorso con:

Mi viene molto bene lavorare per immagini, facendomi schemi, diagrammi, queste cose. Bene, vedo se [il problema dato] posso rappresentarlo così.

Video 2 - [MVI_0803] (minuto 1.04-1.12)

Procedendo nell'analisi possiamo osservare che, effettivamente, la studentessa si serve molte volte di disegni, rappresentazioni grafiche, schemi, diagrammi ad albero per affrontare e continuare la risoluzione dei diversi problemi. Anche nelle risposte alla seconda e terza domanda del questionario 3 (Aspetti cognitivi e Aspetti affettivi) afferma: "sì, uso immagini per visualizzare quello che ho nella testa" e, successivamente, "le immagini e le rappresentazioni grafiche mi aiutano ad affrontare il problema".

A questo punto durante il colloquio si addentra nella discussione del protocollo relativo al Problema dei Fagioli.

6.1.1. Problema dei Fagioli

Fase 1: Leggere il problema

Inizia con questa fase la **Componente di ricerca (IC)**.

Inizialmente la studentessa afferma che ha dei dubbi sul testo del problema, e cerca di risolverli aiutandosi con delle rappresentazioni grafiche della situazione.

Non mi piace come è enunciato il problema, è confuso. Quando alla fine dice “ripeti una terza volta l’operazione, ora con 100 fagioli” non capisco se quando dice “ripeti l’operazione” si riferisce a passare una volta i fagioli dal sacco bianco al sacco rosso, o a passare i fagioli dal bianco al rosso e di nuovo dal rosso al bianco. E quando dice “ora con 100 fagioli” sarebbe meglio dicesse “di nuovo con 100 fagioli” dato che questa quantità di fagioli era già stata utilizzata. Supporrò che l’operazione è “andata e ritorno”.

Frase A.1

Fin dalle prime fasi della risoluzione notiamo come l’alunna utilizzi *disegni e rappresentazioni grafiche* per supportare i suoi ragionamenti. Per prima cosa rappresenta la situazione descritta dal problema e fa delle osservazioni sul disegno.

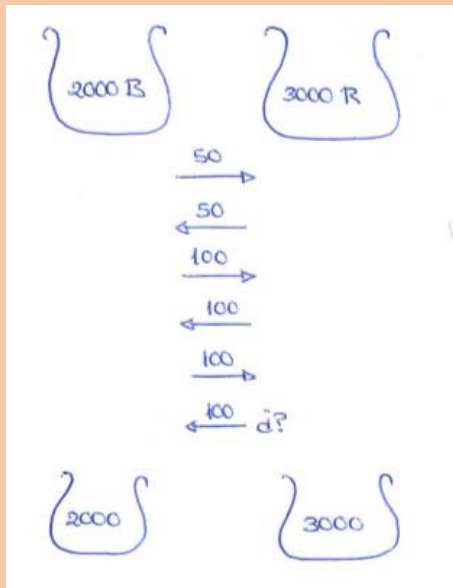


Figura 6.1.1

La prima cosa che osservo è che ogni sacco, alla fine, avrà lo stesso numero di fagioli che al principio, quello che non so è quanti e di quale colore.

Frase A.2

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto le istruzioni del problema, le rappresenta graficamente.]

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo una prima esplorazione del problema, ricava un'informazione utile per la risoluzione dello stesso.]

Successivamente torna ad aver dubbi sul problema.

Davvero ho bisogno di sapere esattamente quanti fagioli di ogni colore ci sono in ogni sacco? Rileggo la domanda e non mi è chiara una cosa: semplicemente ci concentriamo sul numero di fagioli di colore diverso dal sacco corrispondente e relazioniamo, o ci concentriamo nella proporzione che questi fagioli di colore

diverso hanno rispetto al numero di fagioli totali nel sacco? Suppongo che non intervengano le proporzioni.

Frase A.3

A questo punto, chiariti i suoi dubbi sull'enunciato, pensa che possa essere un problema in cui si debbano usare nozioni di probabilità. Questo è probabilmente dovuto al fatto che il quesito è strutturato in un modo molto simile a quelli degli esercizi tipici della materia.

BLOCCO! Penso che ci sia bisogno di usare la probabilità per risolverlo e dato che a me non piace non so da dove iniziare.

Frase A.4

Fase 2 e Fase 3: Esplorare e eseguire la strategia

Entriamo nella seconda parte del problema. Come abbiamo specificato nel capitolo 1, la seconda e la terza fase della struttura di risoluzione dei problemi che suggerisce Polya, ovvero *tracciare un piano per risolvere il problema e mettere in pratica il piano*, durante l'attività spesso si alternano, in una successione di formulazioni e applicazioni di piani di risoluzione differenti, studiati man mano per raggiungere la risoluzione. In questo protocollo di risoluzione si può notare questa successione di strategie differenti che vengono modificate e utilizzate per il raggiungimento dell'obiettivo.

La studentessa, in questo punto del protocollo di risoluzione, formula un piano di risoluzione del problema. Semplifica il problema utilizzando delle quantità ridotte di fagioli. Sarà fondamentale questo passaggio per il raggiungimento della soluzione.

Figura 6.1.2

Frase A.5

Penso a un caso più piccolo, per esempio quando nel sacco di fagioli bianchi ce ne sono 40 e in quello dei rossi ce ne sono 60; i movimenti che prima erano di 50 fagioli ora sono di 1 e quelli di 100 ora sono di 2.

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver formulato le istruzioni del nuovo problema più semplice, le rappresenta graficamente.]

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, la studentessa, dopo un'esplorazione iniziale del problema, decide di formulare un problema simile che sia più facile da risolvere.]

Giustifica in seguito la scelta dei nuovi valori iniziali.

Ho diviso tutto per 50 per mantenere le proporzioni.

Frase A.6

[Affermazione, modalità neutrale]

A questo punto del protocollo l'approccio della studentessa al problema cambia completamente: dopo il momento iniziale di blocco, causato dal pensiero di dover usare le nozioni di probabilità, ora, con un piano d'azione attuabile, la studentessa continua la risoluzione più serenamente. A questo proposito è significativa la frase A.7.

Sento sollievo ad aver trovato un qualcosa per poter continuare.

Frase A.7

Quindi continua la risoluzione del problema pianificando una strategia di risoluzione che la possa aiutare a “contare” il numero di fagioli all’interno dei sacchi: Fare schemi e tabelle.

Conterò il numero di fagioli con [l’aiuto di] una tabella.

Frase A.8

N° de movimiento en el que nos encontramos	Opción que seguimos	N° alubias Rojas en saco rojo	N° alubias blancas en saco blanco	N° alubias Rojas en saco blanco	N° alubias blancas en saco rojo
Estado inicial		60	40	0	0
Después del 1 ^{er} movimiento $\{B\} \xrightarrow{1} \{R\}$		60	39	0	1
Después del 2 ^o movimiento $\{B\} \xleftarrow{1} \{R\}$	Saco la blanca (a)	60	40	0	0
	Saco la roja (b)	59	39	1	1
Después del 3 ^{er} movimiento. $\{B\} \xrightarrow{2} \{R\}$	Si en el 1 ^{er} movimiento hice (a)	60	38	0	2
	Si hice (b) hay opciones				
	(a') Saco dos blancas	59	37	1	3
	(b') Saco 1 blanca y otra roja	60	38	0	2
Después del 4 ^o movimiento $\{B\} \xleftarrow{2} \{R\}$	Si estoy en el caso (a)	58			
	⋮				

Figura 6.1.3

[Fase di *esplorazione*, *modalità discendente*, la studentessa, seguendo il piano che ha formulato in precedenza, procede all'esplorazione di questo nuovo problema più semplice da lei ideato.]

Possiamo notare che all'interno di questa tabella la studentessa sta usando un'ulteriore strategia, ovvero sta *studiano sistematicamente tutti i casi possibili*. Nella seconda colonna, infatti, che la studentessa chiama "Opzione che seguiamo", sono presenti i differenti casi possibili mentre nelle ultime 4 colonne le relative quantità ottenute dai vari passaggi. La strategia è molto più semplice da attuare in questo caso in cui le quantità considerate sono minori, poiché il numero di possibilità non è così grande come nel caso originale.

Per esempio osserviamo la riga della tabella evidenziata dalla freccia. Ci troviamo nel momento in cui è stato già effettuato il secondo movimento, ovvero il passaggio di un fagiolo dal sacco rosso al sacco bianco. La situazione di partenza, ovvero quella dopo il primo movimento è: un fagiolo bianco nel sacco rosso e zero fagioli rossi nel sacco bianco. Il fagiolo estratto dal sacco rosso, durante il secondo movimento, può essere: o l'unico fagiolo bianco presente nel sacco o uno degli altri fagioli, che sono rossi. Se si estrae il fagiolo bianco ("Saco la blanca"), si ritorna alla situazione di partenza, mentre se si estrae uno dei fagioli rossi ("Saco la roja") si arriva a una situazione in cui c'è un fagiolo bianco nel sacco rosso e un fagiolo rosso nel sacco bianco.

La studentessa però non completa la tabella; infatti si rende conto che questa non era una strategia che la poteva aiutare nella risoluzione. In questo momento della risoluzione la studentessa esercita un controllo sul suo operato. Continuerà il processo cambiando strategia di risoluzione.

A questo punto mi rendo conto che la tabella non è la scelta migliore e mi sto incasinando, allora provo con un diagramma ad albero.

Frase A.9

[Formulazione di un piano di risoluzione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver provato a risolvere il problema con l'uso di una tabella, controlla la situazione e vedendo che non sembra possibile proseguire cambia strategia di risoluzione.]

Nel colloquio parla di questo passaggio da una strategia all'altra, dalla tabella al diagramma ad albero.

[...] Ho iniziato con una tabella e mi sono resa conto che così era impossibile, dopo sono passata al diagramma a forma di albero. Avevo lavorato [con il diagramma ad albero] in altre materie, me lo ricordavo meglio e mi sentivo meglio per questo...

Video 3 - [MVI_0803] (minuti 1.15-1.27)

E pochi secondi dopo continua il discorso, guardando direttamente il suo protocollo.

Qui c'è la tabella e mi sono resa conto che sarebbe diventata gigante quindi, niente; mentre qui {indica il diagramma ad albero} ho cambiato totalmente strategia, continuo a lavorare per immagini sul problema però cambio strategia ...

Video 4 - [MVI_0803] (minuti 1.41-1.51)

Qualche minuto dopo riprende di nuovo l'argomento.

Può essere che stessi seguendo questa strategia... dopo mi sono bloccata, l'ho lasciato da parte [il problema] e quando sono tornata a riprendere il problema non mi è piaciuto come l'ho vista [la tabella] e ho detto "beh, passo ad un'altra [strategia]". Sicuramente questo problema l'ho fatto per fasi.

Video 5 - [MVI_0804] (minuti 2.44-2.58)

Da questi pochi minuti trascritti possiamo notare alcune cose. Prima di tutto che la studentessa fa uso, per risolvere il problema, di conoscenze e strategie acquisite in momenti diversi del suo percorso di studi. Il suo modo di approcciarsi al problema è quasi totalmente grafico. La studentessa si serve di molte immagini e rappresentazioni grafiche durante il processo di risoluzione, non solamente come appoggio al ragionamento, ma anche come vera e propria strategia di risoluzione. Dalle affermazioni del video 5, invece, possiamo intuire che l'alunna, quando si sente in una posizione di stallo, in cui non sa come procedere, non si accanisce sul problema ma si distrae con altro per poi ritornare alla sua risoluzione.

A questo punto cambia strategia di risoluzione optando per *utilizzare un diagramma ad albero*. L'uso di questa strategia è molto importante perché sarà un punto fondamentale per la risoluzione del problema.

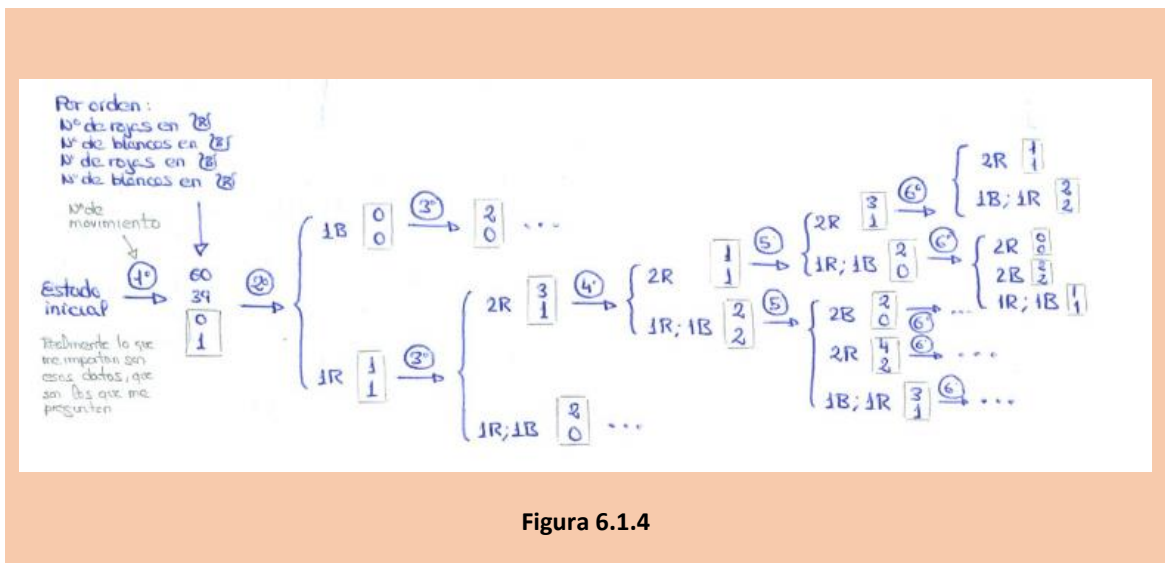


Figura 6.1.4

[Fase di *esplorazione, modalità discendente*, la studentessa, seguendo il piano che ha formulato in precedenza, procede all'esplorazione del nuovo problema più semplice da lei ideato.]

Anche in questo diagramma, come nella tabella, si nota lo *studio sistematico di tutti i casi possibili*, anche se viene sviluppato dettagliatamente un unico ramo tra le varie

possibilità. Notiamo inoltre che solamente dopo il primo movimento appaiono tutti i valori, ovvero il numero di fagioli rossi nel sacco rosso, quello dei bianchi nel sacco bianco, quello dei rossi nel sacco bianco e quelli dei bianchi nel sacco rosso. Già al secondo passaggio mantiene nel diagramma solamente gli ultimi due valori sopra citati che effettivamente sono quelli utili per arrivare al risultato.

La studentessa nota quindi delle regolarità all'interno del diagramma.

Osservo che dopo un numero pari di movimenti (il 2°, il 4° e il 6°) il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e il numero di fagioli rossi nel sacco bianco è lo stesso.

Frase A.10

[Congettura, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver esplorato il problema con l'uso del diagramma ad albero, esplicita l'idea, corretta, che il numero di fagioli di un colore nel sacco dell'altro colore sia lo stesso nei due sacchi.]

Nel colloquio la studentessa parla della congettura che esplicita nella frase A.10 descrivendo il modo in cui è giunta a questa conclusione.

... e lì [nel diagramma ad albero] ho visto una specie di relazione nella quale non mi importava tanto il numero di fagioli in se...

Video 6 - [MVI_0803] (minuti 1.27-1.33)

Pochi secondi dopo continua il discorso facendo riferimento al protocollo.

... e qui nel diagramma ad albero mi sono resa conto che, anche se non lo finivo, seguiva uno schema. Quindi potevo capire un poco questo schema... ho visto che si ripetevano molto le uguaglianze... zero zero, due zero qui si

ripete, il tre uno qui anche si ripete... quindi ho visto che sempre si ripetevano questi numeri.

Video 7 - [MVI_0803] (minuti 1.52-2.09)

Qualche minuto dopo riprende l'argomento.

Qui soprattutto quello su cui mi fisso è il numero di movimenti che faccio e la quantità di fagioli rossi o bianchi che ci sono in ogni sacco, cioè più o meno la proporzione. Quindi mi rendo conto che, ogni due movimenti, sono uguali i fagioli rossi [nel sacco bianco] e quelli bianchi [nel sacco rosso]. Qui [sono] uguali {indica i numeri riquadrati del disegno del diagramma ad albero sul protocollo} ... ogni due movimenti sono uguali, quindi dico “bene, ogni due movimenti suppongo che, non importa il numero di fagioli totali [in ogni sacco], le quantità [di fagioli bianchi nel sacco rosso e rossi nel sacco bianco] saranno uguali.”

Video 8 - [MVI_0804] (minuti 0.05-0.30)

Le frasi tratte dal colloquio individuale in questo punto della risoluzione sono importanti per capire come la studentessa ha interpretato i risultati che estrapola dall'analisi del diagramma ad albero. In primo luogo possiamo supporre, a partire dall'affermazione nella trascrizione del video 6, che la studentessa fino a quel momento avesse cercato un numero specifico di fagioli, mentre ora si sofferma solamente sulla relazione che v'è tra le due quantità interessate. La “proporzione” che sta cercando è quella tra il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e quello di fagioli rossi in quello bianco. Solamente guardando il diagramma ad albero e, in particolare, i valori riquadrati, capisce che questi seguono uno schema, ovvero ogni due movimenti, i valori considerati sono uguali.

{In questa prima parte della risoluzione prevale, sulle altre, la componente teleologica. La studentessa sceglie un approccio per immagini sia illustrando il procedimento descritto dal problema, sia esplicitando le strategie usate per la sua risoluzione (*componente teleologica e comunicativa*). La *componente epistemica* invece è in primo piano, rispetto alle altre, quando la studentessa esercita un controllo sul suo operato e decide di cambiare strategia (Frases A.9).}

Fase 4: Verificare i risultati ottenuti

Inizia qui la **Componente deduttiva (DC)** del processo di risoluzione. La studentessa inizia il percorso per provare il risultato ottenuto (Frases A.10).

Perché succede questo?

Frase A.11

Si può generalizzare al caso che richiedevano?

Frase A.12

[Domande]

La studentessa cerca di trovare la risposta a queste domande in modo matematico. Prende il risultato ottenuto dall'analisi del diagramma ad albero e lo formalizza, trasformandolo in un risultato generale applicabile anche al problema originale.

Dato che il numero di fagioli bianchi nel sacco di quelli rossi e il numero di fagioli rossi nel sacco di quelli bianchi suppongo sia lo stesso, forse posso trovare una relazione di equivalenza tra i due.

Frase A.13

[*Congettura, modalità distaccata*, la studentessa si allontana dal problema e cerca un modo per risolverlo in modo formale]

IDEA! Proverò a utilizzare delle equazioni per vedere dove arrivo.

Frase A.14

[Formulazione di un *piano, modalità distaccata*, la studentessa introduce gli strumenti algebrici per verificare la sua congettura]

Se osserviamo le risposte date dalla studentessa alla seconda e terza domanda del questionario 3 (Aspetti cognitivi e Aspetti affettivi) possiamo trovare alcune frasi significative.

“Ho sempre creduto e credo che il mio modo di pensare sia più algebrico che analitico.”

“Mi piacciono i lavori algebrici e logici.”

“I ragionamenti algebrici mi danno una sensazione di benessere.”

Da queste risposte risulta chiaro che la studentessa è a suo agio nell'uso del linguaggio algebrico. A conferma di questo possiamo notare che in questo protocollo di risoluzione si appoggia al *linguaggio algebrico*, per provare la congettura formulata in precedenza. In primo luogo introduce una notazione per i dati utili alla risoluzione ovvero il numero iniziale di fagioli bianchi nel sacco bianco e quello dei rossi nel rosso, il numero finale di fagioli bianchi nel sacco bianco, quello di rossi nel rosso, quello di bianchi nel rosso e infine quello di rossi nel bianco.

Notación:

Nº de alubias blancas en el sacco de las alubias blancas al principio } NBB_0

Nº alubias rojas en el sacco de las rojas al principio } NRR_0

Nº alubias blancas en el sacco de las blancas al final } NBB_F

Nº alubias rojas en el sacco de las rojas al final } NRR_F

Nº alubias blancas en el sacco de las rojas al final } NBR_F

Nº alubias rojas en el sacco de las blancas al final } NRB_F

Figura 6.1.5

[Affermazione, modalità neutra]

A questo punto, anche se non consciamente, inizia ad utilizzare la strategia di *Ragionamento regressivo* costruendo quattro equazioni e risolvendo un sistema con due di queste.

$$\begin{aligned} NBB_0 &= NBB_F + NBR_F \\ NRR_0 &= NRR_F + NRB_F \end{aligned}$$

Figura 6.1.6

Il numero di fagioli bianchi che ci sono nel sacco di fagioli bianchi all'inizio [prima dei vari movimenti] è lo stesso che ci sarà alla fine [dei movimenti,

suddiviso] tra il sacco di fagioli bianchi e il sacco dei rossi. Lo stesso con i fagioli rossi.

Frase A.15

[Passo deduttivo, modalità distaccata, la studentessa comincia a costruire le equazioni che la porteranno alla risoluzione del problema]

Handwritten equations on a white background. The first equation is $NBB_F + NRB_F = NBB_c$, where NBB_c is circled. The second equation is $NRR_F + NBR_F = NRR_c$, where NRR_c is boxed.

Figura 6.1.7

Inoltre il numero di fagioli in ogni sacco, dopo tutti i movimenti, è lo stesso che all'inizio.

Frase A.16

[Passo deduttivo, modalità distaccata, la studentessa inserisce altre equazioni che le serviranno per la risoluzione del problema]

A questo punto risolve, senza specificare tutti i passaggi, un sistema formato dalla prima equazione della figura 6.1.6 e dalla prima della figura 6.1.7. Ottenendo così il risultato sperato.

Handwritten algebraic derivation on a white background. It shows the cancellation of terms in the equations from Figure 6.1.7 to reach a final conclusion.

Figura 6.1.8

[Controllo, modalità ascendente, la studentessa verifica, utilizzando alcune equazioni, la congettura da lei proposta anteriormente]

Sono significative alcune frasi, registrate nel colloquio individuale, nelle quali la studentessa spiega il processo seguito in questa ultima parte del protocollo di risoluzione.

Siccome vedo che c'è una certa proporzione penso che devono esistere delle equazioni [...] che mi diano questa proporzione. Quindi do i nomi alle cose che credo siano più importanti che sono: il numero di fagioli bianchi al principio, rossi al principio e, alla fine, in ogni sacco. Mi creo queste equazioni e alla fine, risolvendole, mi danno quello che io avevo visto, cioè che deve esserci lo stesso numero di fagioli rossi e bianchi in ogni sacco. Detto così suona molto facile, però...

Video 9 - [MVI_0804] (minuti 0.33-0.59)

Torna in queste frasi il termine tecnico “proporzione”, possiamo notare che il linguaggio che la studentessa usa durante il colloquio è più formale rispetto a quello che utilizza nel protocollo di risoluzione. Si può intuire, dall'ultima frase, che la studentessa ha trovato il problema abbastanza difficile cosa che viene confermata dalle sue risposte al questionario 4.

{In questa ultima parte del protocollo prevale la *componente epistemica* su quella teleologica. La studentessa cerca di giustificare le sue affermazioni, esercita un controllo sul suo lavoro così da poter formalizzare il risultato. In primo piano è anche la *componente comunicativa*, in particolare nella stesura e nella risoluzione delle equazioni: il linguaggio algebrico utilizzato è chiaro e conciso.}

In quest'ultima parte della risoluzione (componente deduttiva) possiamo applicare il modello di Toulmin per le argomentazioni per esprimere chiaramente la relazione tra le varie parti del protocollo.

L'ultima frase che fa parte della componente di ricerca (Frase A.10) è l'esposizione, da parte della studentessa, della congettura (claim). Successivamente, tramite l'applicazione di regole algebriche conosciute, vengono costruite le giustificazioni al claim, ovvero le quattro equazioni (data). È questo un esempio di ragionamento abduttivo, ovvero un ragionamento nel quale il soggetto, dato il risultato, presunto o chiaro che sia, ricerca delle giustificazioni per provare la sua veridicità.

Claim: la congettura (Frase A.10), ovvero il fatto che dopo l'ultimo passaggio il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e rossi nel sacco bianco è lo stesso.

Data: le quattro equazioni costruite dalla studentessa seguendo le regole del problema.

Warrant: le regole algebriche per la risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni.

Qualifier: probabilmente, la studentessa affermerà nel colloquio che non era sicura che la sua ipotesi fosse corretta.

Che possiamo schematizzare così:

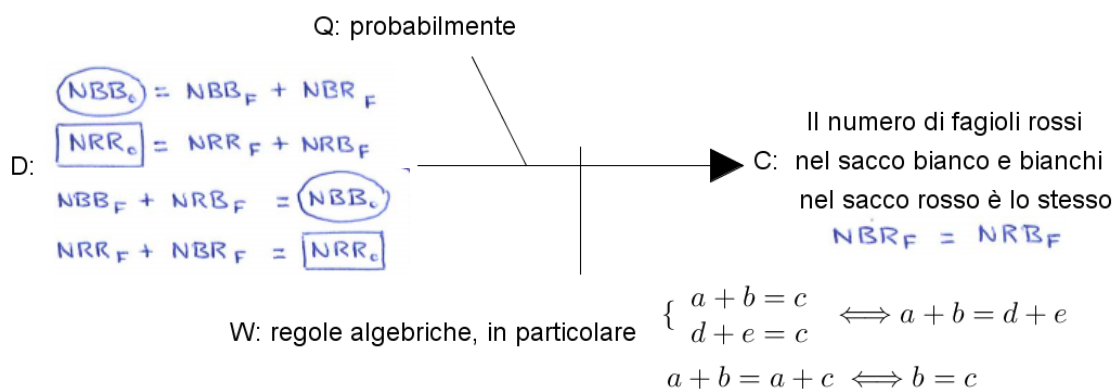


Figura 6.1.9

Approfondimenti: l'uso del ragionamento regressivo

Durante il colloquio la studentessa parla dell'uso della strategia del ragionamento regressivo. Nel Questionario 5, al termine della risoluzione, aveva risposto

negativamente alla domanda 2, nonostante avesse effettivamente impiegato la strategia nella parte finale del protocollo.

Forse il concetto che io ho di ragionamento regressivo è essere convinti di qual è la soluzione e, a partire dall'essere convinti, svilupparla. Però, certo... Io qui sì, avevo un'ipotesi, però non ero sicura di questa.

Video 10 - [MVI_0804] (minuti 1.47-2.00)

E pochi secondi dopo continua il discorso.

Sempre mi hanno detto: “questo è il ragionamento regressivo, questo che stai utilizzando è il ragionamento regressivo”. Arrivo a questa materia e dico “ah bene, il ragionamento regressivo è questo”. Siccome non ho buona padronanza del ragionamento regressivo, forse sì, lo uso più di quanto credo.

Video 11 - [MVI_0804] (minuti 2.21-2.33)

Da queste poche frasi si capisce che la studentessa, ha lavorato con la strategia del ragionamento regressivo in contesti in cui una persona esterna, competente, forse un insegnante, le proponeva la strategia e la aiutava ad usarla. Pare che, non essendo abituata ad utilizzare questa strategia autonomamente, non riesca a riconoscerla al di fuori dei suddetti contesti.

Considerazioni sulla risoluzione del problema

Riassumiamo l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponendo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate evidenziando i punti di svolta nella risoluzione per il conseguimento della soluzione, la

seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate maggiormente, la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
Fase 1: Leggere il problema		
Figura 6.1.1	<i>Fare disegni e rappresentazioni grafiche</i> (per tutto il protocollo)	
Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia		
Frase A.5	<i>Risolvere un problema più semplice</i>	✓
Frase A.8 e Figura 6.1.3	<i>Fare schemi e tabelle, Studio sistematico di tutti i casi</i>	
Frase A.9	Controllo	
Figura 6.1.4	<i>Utilizzare diagrammi ad albero, Studio sistematico di tutti i casi</i>	✓
Frase A.10	Congettura	
Fase 3: Verificare i risultati ottenuti		
Frase A.14	<i>Utilizzare un linguaggio algebrico</i>	✓
Figura 6.1.5		
Frase A.15 e Figura 6.1.6	<i>Utilizzare il ragionamento regressivo,</i>	
Frase A.16 e Figura 6.1.7	<i>Utilizzare un linguaggio algebrico</i>	
Figura 6.1.8	Conclusione	

Tabella 6.1.1 – Strategie di risoluzione del Problema dei Fagioli

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Figura 6.1.1	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica
Frase A.2	IC	Esplorazione	Ascendente	
Figura 6.1.2	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase A.5	IC	Piano	Ascendente	Teleologica
Frase A.6	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase A.8 e Figura 6.1.3	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase A.9	IC	Piano	Ascendente	Teleologica
Figura 6.1.4	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase A.10	IC	Congettura	Ascendente	Teleologica
Frase A.11 e A.12	DC	Domande		Epistemica
Frase A.13	DC	Congettura	Distaccata	Teleologica
Frase A.14	DC	Piano	Distaccata	Epistemica
Figura 6.1.5	DC	Affermazione	Neutra	Comunicativa
Frase A.15 e Figura 6.1.6	DC	Passo deduttivo	Distaccata	Epistemica e Comunicativa
Frase A.16 e Figura 6.1.7	DC	Passo deduttivo	Distaccata	Comunicativa
Figura 6.1.8	DC	Controllo	Ascendente	

Tabella 6.1.2 – Analisi metodologica del Problema dei Fagioli

La prima cosa che si nota, a colpo d'occhio guardando questo protocollo di risoluzione è la quantità di immagini utilizzate. Possiamo notare, leggendo la stesura, come questi risultino fondamentali per la studentessa prima nella visualizzare del problema proposto, poi nella semplificazione (punto di svolta della risoluzione) e infine nella risoluzione.

Possiamo dividere in due parti distinte il protocollo di risoluzione: la componente di ricerca e quella deduttiva.

La fase di ricerca è caratterizzata dalla presenza costante della componente teleologica. Possiamo notare che è caratterizzata da una serie di esplorazioni e formulazioni di piani, con un'alternanza di modalità discendente e ascendente fino ad arrivare all'esplicitazione della congettura. È questa la parte più corposa del protocollo, ed è quella in cui la studentessa utilizza le immagini.

Dopo una prima fase di esplorazione in cui la studentessa rappresenta e fa delle osservazioni sul problema, la formulazione del piano di risoluzione (Frase A.5) segna il punto di svolta. L'idea di ridurre i valori dati nel testo, risolvendo il nuovo problema, permetterà alla studentessa di giungere alla soluzione. Anche ora affronta il nuovo problema in un modo grafico, con una tabella. In questa parte di protocollo è in primo piano la componente teleologica, mentre possiamo notare come quella comunicativa rimanga sullo sfondo. Le immagini non servono solamente per la risoluzione, ma anche per la comunicazione al lettore dei vari passaggi risolutivi. A questo punto c'è il primo cambio di strategia: rendendosi conto che la tabella non la aiutava nella risoluzione, la studentessa decide di passare ad utilizzare un diagramma ad albero. È questo il primo momento importante di controllo da parte della studentessa del suo operato. C'è un'alternanza della componente epistemica e di quella teleologica: il passaggio da una strategia all'altra è caratterizzato da quella epistemica, mentre con la decisione di utilizzare un diagramma ad albero ritorna a prevalere la teleologica. Con l'utilizzo di questa strategia arriverà alla formulazione di una congettura.

La fase di passaggio dalla componente di ricerca a quella deduttiva è caratterizzata dalla formulazione di una domanda: Perché succede questo? La presenza della

componente epistemica è chiara, non scomparirà fino alla fine del protocollo di risoluzione. La differenza dalla componente di ricerca è notevole: l'alternanza delle modalità ascendenti e discendenti lascia il posto a quella distaccata. La studentessa verifica la congettura formulata tramite l'utilizzo di una conoscenza esterna, le equazioni (componente teleologica). La componente comunicativa ora è in primo piano.

Possiamo notare che ogni qual volta la studentessa ha incontrato una difficoltà, o si è resa conto che il cammino di risoluzione che stava seguendo non portava da nessuna parte, non si è intestardita ma ha cercato una risoluzione alternativa.

L'uso della strategia del ragionamento regressivo non è stato cosciente. La strategia è stata utilizzata nella verifica della congettura formulata. È stato possibile il suo utilizzo solamente dopo la costruzione del possibile risultato.

6.1.2. Problema dei Cammini

In questo secondo protocollo la studentessa inizia la risoluzione del problema senza dubbi sulla formulazione del quesito, la sua risoluzione consiste solamente nella formulazione di una serie di piani e nella applicazioni degli stessi.

Fase unica: Esplorare e eseguire la strategia

Siamo all'interno della **Componente di ricerca (IC)**. La studentessa inizia la risoluzione facendo uno *studio sistematico di tutti i casi*, cercando di disegnare, dividendoli secondo le loro caratteristiche, tutti i cammini possibili sul triangolo di partenza.

Osserviamo che, per ogni fila della piramide, ci sono due cammini perché ogni fila comincia e finisce con 1 e, se dal centro della fila andiamo verso il basso, arriviamo al 7.

Frase C.1

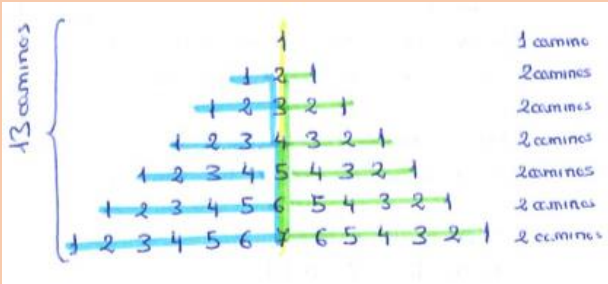
[Esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto il testo, inizia la risoluzione del problema seguendo il piano di contare tutti i cammini possibili]

Nel colloquio individuale, parlando del problema dei cammini ad un certo punto comincia a spiegare la risoluzione.

La verità è che io mi sono immaginata di essere una personcina e di dover arrivare in questo posto {indica il numero 7}, e mi sono resa conto di questo: che l'unico cammino era iniziare da qui {indica uno dei numeri 1} [e andare] fino al centro e fino a sotto... E ho sommato e ho sommato...

Video 10 - [MVI_0804] (minuti 4.50-5.03)

È curioso notare quanto la studentessa si senta coinvolta nel problema. Addirittura si immagina di percorrere lei stessa il cammino dalla posizione 1 alla 7.



Il diagramma mostra un triangolo di numeri da 1 a 7. La prima fila ha il numero 1. La seconda fila ha i numeri 1 e 2. La terza fila ha i numeri 1, 2, 2, 1. La quarta fila ha i numeri 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1. La quinta fila ha i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1. La sesta fila ha i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1. La settima fila ha i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. A sinistra del triangolo, una parentesi graffa racchiude le prime sei file e accanto è scritto "13 cammini". A destra del triangolo, accanto a ogni fila, è scritto il numero di cammini: 1 cammino per la prima fila, 2 cammini per la seconda, 2 cammini per la terza, 2 cammini per la quarta, 2 cammini per la quinta, 2 cammini per la sesta, e 2 cammini per la settima.

Figura 1.10

*Sottolineando i suddetti cammini mi sono resa conto che nella prima fila al posto che due cammini ce n'è solo uno, così abbiamo un totale di 13 cammini ($6 * 2 + 1 = 13$).*

Frase C.2

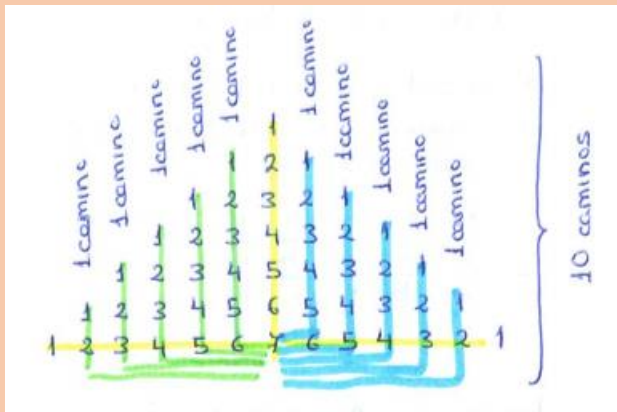
[Fase si esplorazione, modalità discendente, la studentessa, con l'idea di contare in modo sistematico tutti i casi possibili, inizia a disegnarli.]

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver disegnato i primi cammini, si rende conto che non ci sono due cammini ogni fila, come aveva supposto: esercita un controllo sul procedimento seguito.]

Continua con la strategia di contare in modo sistematico tutti i cammini possibili, passa ora ad un altro gruppo di cammini.

Possiamo anche osservare che in ogni colonna, andando dall'alto in basso e successivamente verso il centro dell'ultima fila, c'è un altro cammino.

Frase C.3



Sottolineando i suddetti cammini mi rendo conto che i cammini delle colonne agli estremi e di quella centrale li ho già considerati prima.

Frase C.4

Figura 6.1.11

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa disegna altri cammini, diversi dai precedenti, che hanno caratteristiche diverse.]

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver disegnato i cammini descritti, si rende conto che c'è un cammino ogni colonna come aveva supposto ma che tre di questi sono già stati contati in precedenza: esercita un controllo sul procedimento seguito.]

A questo punto la studentessa si rende conto che questa non è la migliore strategia da seguire per la risoluzione del problema, siamo in un momento di transizione tra una strategia e un'altra.

PROBLEMA! Mi rendo conto che è molto difficile guardarli tutti “a occhio” quindi osservo il problema più accuratamente.

Frase C.5

[Affermazione, modalità neutrale]

A questo punto la studentessa inizia ad *approfittare della simmetria* del problema e a concentrarsi quindi solamente sulla prima metà del triangolo.

Osserviamo che se iniziamo [il cammino] in una fila è consentito andare solamente verso il centro e [verso] il basso, in modo che, contando i cammini che ci sono nella metà della piramide e successivamente moltiplicandoli per due, avremo tutti i cammini della piramide.

Frase C.6

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver osservato la struttura del problema, decide di approfittare della sua simmetria per risolverlo.]

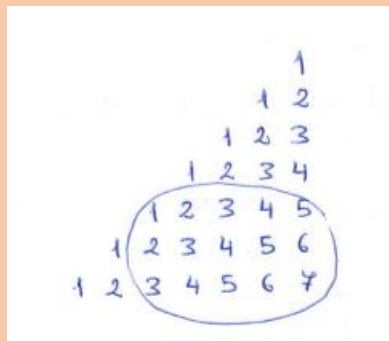


Figura 6.1.12

Considera quindi una porzione di triangolo e comincia a fare delle osservazioni sui percorsi possibili per arrivare alla soluzione. Questo è il punto fondamentale della risoluzione. A partire da queste osservazioni la studentessa arriverà alla soluzione.



Figura 6.1.13

Mi rendo conto che, da qualunque fila iniziamo, il numero di volte che andiamo verso il centro e il numero di volte che andiamo verso il basso è lo stesso, non importa quale sia il cammino che scegliamo.

Frase C.7

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa inizia a esplorare il problema attentamente soffermandosi solamente su una metà del triangolo.]

A questo punto la studentessa comincia a generalizzare il numero di movimenti verso il centro e verso il basso, cercando di arrivare a un'espressione generale, per poi riuscire a calcolare il numero totale di cammini possibili. Numerava le file a partire dall'alto e scrive una formula generale dei movimenti necessari, a partire da ogni scalino, da ogni 1, per arrivare al 7.

N° volte che andiamo al centro

$$\text{N}^\circ \text{ veces que vamos al centro} = (\text{n}^\circ \text{ fila}) - 1$$

$$\text{N}^\circ \text{ veces que vamos abajo} = (\text{n}^\circ \text{ total de filas}) - \text{n}^\circ \text{ fila}$$
 N° volte che andiamo in basso

Figura 6.1.14

[Affermazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo osservato la parte di

triangolo cerchiata nella figura 6.1.12, generalizza il numero di movimenti verso destra e verso il centro per poter arrivare al numero 7.]

La studentessa, nel colloquio individuale, parla del cambio di strategia utilizzata.

All'inizio mi lanciai a risolvere il problema cercando di contare [i cammini senza una strategia specifica]. Dopo un po' mi resi conto che no, che se stai facendo matematica devi pensare un po', mi resi conto che era simmetrico, e incontrai uno schema.

Video 11 - [MVI_0804] (minuti 4.38-4.50)

È curioso notare come la strategia del fare uno studio sistematico di tutti i casi non venga considerata dalla studentessa come un procedimento matematico. Sembra quasi che se non utilizza un linguaggio matematico non stia facendo matematica, non stia pensando.

Anche in questo problema possiamo notare come l'uso del linguaggio algebrico dia sicurezza alla studentessa per procedere nel proprio lavoro.

{In questa prima parte di protocollo possiamo vedere come la componente *teleologica* prevalga su quella *epistemica*, mentre quella *comunicativa* è presente in sottofondo e in particolare nella figura 6.1.14 dove la studentessa comincia ad usare un linguaggio più algebrico.}

IDEA! Chiamo ogni movimento verso il centro con una lettera e ogni movimento verso il basso con un'altra.

Frase C.8

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Inizia quindi a scrivere una notazione per i movimenti.

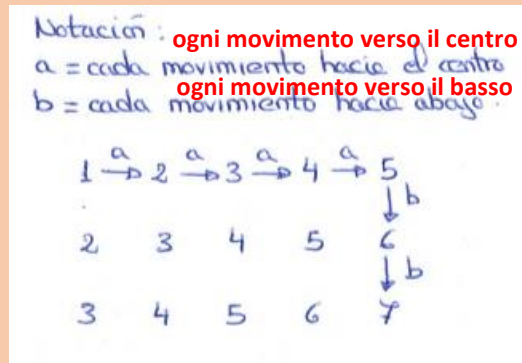


Figura 6.1.15

[Affermazione, neutrale]

A questo punto torna ad appoggiarsi al *linguaggio algebrico* per aiutarsi nel ragionamento e scrive:

Un cammino quindi sarà una combinazione di a e b tali che...

Frase C.9

$$\begin{aligned}n^{\circ} \text{ de } a &= n^{\circ} \text{ fila} - 1 \\n^{\circ} \text{ de } b &= 7 - n^{\circ} \text{ fila} \\n^{\circ} \text{ de } a + n^{\circ} \text{ de } b &= 6.\end{aligned}$$

Figura 1.16

[Affermazione, neutrale]

La figura 6.1.16, molto semplicemente è la formalizzazione di quello che aveva scritto in precedenza (figura 6.1.14). Si esprime ora in termini di "a" e "b".

A questo punto comincia ad *usare le nozioni apprese di probabilità*, in particolare il calcolo combinatorio, per riuscire ad ottenere la soluzione finale.

Così ci saranno tanti cammini quante sono le combinazioni di a e

b che verificano le condizioni...

Frase C.10

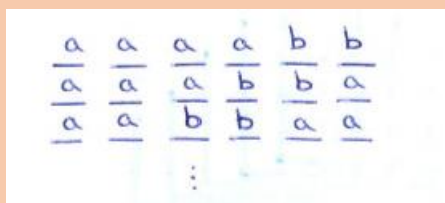


Figura 6.1.17

[Congettura, modalità ascendente, la studentessa, a seguito delle osservazioni sull'esercizio, espone una congettura sulla risoluzione del problema.]

Termina qui la **componente** di ricerca mentre inizia quella **deduttiva (DC)**; la studentessa, inizia ad usare il calcolo combinatorio e, distaccata dal problema, semplicemente calcolando le combinazioni, arriva ad ottenere la quantità totale di cammini in una metà del triangolo.

*Chiamo il numero di cammini possibili iniziando da ogni fila:
 N (numero della fila).*

Il numero totale di cammini sarà

$$\sum_{i=1}^7 N(\text{fila } i\text{-esima})$$

Formula 6.1.1

Ma N (fila i -esima) consiste in calcolare combinazioni

$$\begin{aligned} N(\text{fila } i\text{-esima}) &= \frac{(\text{numero totale di file} - 1)!}{(\text{numero fila} - 1)! (7 - \text{numero fila})!} \\ &= \frac{6!}{(\text{numero di } a)! (\text{numero di } b)!} \end{aligned}$$

Formula 6.1.2

Frase C.11

[Catena deduttiva, modalità distaccata, la studentessa osserva che il numero di cammini totali sarà la somma del numero di cammini per ogni fila; dato che ha supposto che il numero di cammini per ogni fila è il numero di combinazioni senza ripetizione dell'insieme formato dai movimenti a e dai movimenti b, applica le nozioni del calcolo combinatorio.]

A questo punto la studentessa applica le nozioni espresse nella Frase C.11 al caso del problema.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^7 \frac{(7-i)!}{(i-1)!(7-i)!} &= \\
 &= \frac{6!}{0!6!} + \frac{6!}{1!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \\
 &+ \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{5!1!} + \\
 &+ \frac{6!}{6!0!} = \\
 &= 2 \left(\frac{6!}{6!0!} \right) + 2 \left(\frac{6!}{5!1!} \right) + 2 \left(\frac{6!}{4!2!} \right) \\
 &+ \frac{6!}{3!3!} = 2 + 12 + 2 \cdot 15 + 20 = \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

Figura 6.1.18

[Fase di controllo, modalità discendente, la studentessa applica la formulazione più generale al caso specifico.]

A questo punto si ricorda del fatto che sta calcolando solamente i cammini della prima metà del triangolo.

Siccome questa era metà del triangolo:

$$64 * 2 = 128$$

Frase C.12

[Affermazione, controllo logico, la studentessa, ricordandosi di aver studiato solamente metà del triangolo, raddoppia il numero di cammini trovati.]

Ma abbiamo contato il cammino totalmente verticale due volte, allora

$$128 - 1 = 127$$

Frase C.13

[Affermazione, controllo logico, la studentessa, rendendosi conto che il cammino centrale l'ha contato due volte, sottrae 1 al numero dei cammini ottenuto.]

{In quest'ultima parte del protocollo si può notare come la *componente comunicativa* prenda il sopravvento in particolare nell'introduzione di una notazione adeguata e nell'uso delle combinazioni e delle relative formule. La *componente teleologica* lascia il posto a quella *epistemica*, a questo proposito l'introduzione di una notazione può essere considerata come un controllo, una chiarificazione delle congetture espresse fino a un momento prima.}

In quest'ultima parte della risoluzione (componente deduttiva) possiamo applicare il modello di Toulmin per le argomentazioni per esprimere chiaramente la relazione tra le varie parti del protocollo.

Al termine della componente di ricerca la studentessa arriva a esprimere i movimenti descritti dal testo del problema con un'espressione più algebrica (Figura 6.1.16). Afferma inoltre che il totale di tutti i cammini è la somma del numero di cammini per ogni fila (Formula 1.1), che esprime sotto forma di combinazioni (Formula 1.2) (data). Successivamente, tramite l'applicazione delle regole del calcolo combinatorio, arriva alla conclusione, ovvero che il totale dei cammini è 127 (claim). È questo un esempio di ragionamento deduttivo.

Claim: Il numero totale di cammini è 127.

Data: possiamo esprimere il numero di cammini che partono da ogni "1" del triangolo come combinazioni semplici di oggetti in un insieme. L'insieme è

quello delle “a” e delle “b” che sono i possibili movimenti, verso il centro del triangolo e verso il basso, che si possono fare a partire dall’”1” considerato.

Warrant: il numero totale di cammini è la somma delle sopracitate combinazioni semplici.

Backing: le regole del calcolo combinatorio.

Qualifier: sicuramente.

Che possiamo schematizzare così:

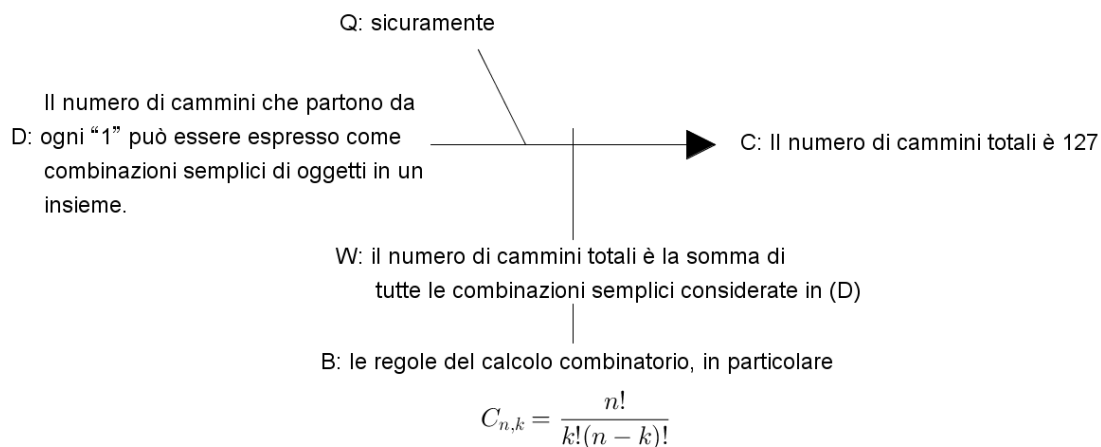


Figura 6.1.19

Approfondimenti: la differenza di difficoltà rispetto al Problema dei Fagioli

Al termine della rapida spiegazione della risoluzione del problema, durante il colloquio, la studentessa afferma di non avere avuto molte difficoltà a risolverlo ([MVI_0804] (minuti 5.04-5.18)) nonostante nel questionario 4 affermi che l’ha trovato abbastanza difficile. A questo punto le viene chiesto il perché afferma che il Problema dei Fagioli l’ha trovato più difficile di quello dei Cammini.

Per iniziare, questo [il Problema dei Cammini] l’ho potuto disegnare in una maniera chiara, quindi, avendolo visualizzato e pensando che con una

penna potevo trovare la soluzione disegnandola, mi è risultato molto più facile [risolverlo] che pensare che dovevo immaginarmi due sacchi enormi e dovevo mentalmente farne la rappresentazione.

Video 12 - [MVI_0804] (minuti 5.32-5.52)

Avere una rappresentazione grafica già pronta, già costruita, semplifica il problema. Infatti la studentessa afferma di avere avuto delle difficoltà a doverla costruire da zero nel primo problema. Le quantità di fagioli proposte, erano così grandi da non poterle rappresentare per iscritto. La studentessa ha avuto difficoltà nel fare una conversione dal testo del problema a una rappresentazione adeguata, solamente immaginandosi queste due quantità enormi. Possiamo supporre che, mentre la presenza di immagini e rappresentazioni scritte aiuta in modo notevole la studentessa nella risoluzione dei problemi, la loro assenza e l'impossibilità di creare una rappresentazione grafica costituisce una difficoltà per lo sviluppo dei suoi ragionamenti.

Successivamente, durante il colloquio, viene approfondito l'uso delle nozioni di probabilità, comparando il fatto che nel Problema dei Cammini ha utilizzato il calcolo combinatorio e ha affermato di non avere avuto problemi a risolverlo, mentre nel Problema dei Fagioli, sia nel protocollo che nel colloquio, risulta che il pensiero di dover usare le nozioni di probabilità le generano un blocco.

È che qui [nel Problema dei Cammini] è una formula, quindi certo, ho una formula e devo solamente sostituire. A me quello che non piace della probabilità è che mi danno il problema e io a partire dal problema devo trovare come risolverlo; ma qui [nel Problema dei Cammini] non mi ricordo perché l'ho visto così chiaro. Ho detto: "ah bene, devo usare le combinazioni". La formula non so se me la ricordavo o me l'hanno detta, semplicemente l'ho sostituita...

Video 13 - [MVI_0804] (minuti 6.58-7.22)

Possiamo notare che, come già supposto in precedenza, le difficoltà maggiori per la studentessa sono nel costruire una rappresentazione adeguata di una situazione. Non è quindi l'uso delle nozioni di probabilità in se che le crea dei problemi. Infatti afferma che data una formula, applicarla a una certa situazione non le genera difficoltà; mentre glielo crea il passaggio da una formulazione scritta del problema a una rappresentazione matematica.

Considerazioni sulla risoluzione del problema

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate evidenziando i punti di svolta nella risoluzione per il conseguimento della soluzione, la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate maggiormente, la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
<i>Fase unica: Esplorare e eseguire la strategia</i>		
Figura 6.1.10	<i>Fare disegni e rappresentazioni grafiche (per tutto il protocollo)</i>	
Fraasi C.1–C.4	<i>Fare uno studio sistematico di tutti i casi</i>	
Frase C.6	<i>Approfittare della simmetria</i>	
Fraasi C.7-9 e Fig 6.1.14-16	<i>Utilizzare un linguaggio algebrico</i>	✓
Frase C.10 e Figura 6.1.17	<i>Fare uso delle nozioni apprese di probabilità</i>	✓
Frase C.12	<i>Approfittare della simmetria</i>	
Frase C.13	Risultato	

Tabella 1.3 – Strategie di risoluzione del Problema dei Cammini

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase C.1 e Figura 6.1.10	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica
Frase C.2	IC	Esplorazione	Ascendente	
Frase C.3 e Figura 6.1.11	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase C.4	IC	Esplorazione	Ascendente	
Frase C.5	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase C.6	IC	Piano	Ascendente	
Figura 6.1.13 e Frase C.7	IC	Esplorazione	Discendente	Comunicativa
Figura 6.1.14	IC	Affermazione	Ascendente	
Frase C.8	IC	Piano	Neutra	Teleologica e Comunicativa
Figura 6.1.15	IC	Affermazione	Neutrale	Epistemica e Comunicativa
Frase C.9 e Figura 6.1.16	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase C.10 e Figura 6.1.17	IC	Congettura	Ascendente	
Frase C.11	DC	Catena deduttiva	Distaccata	
Figura 6.1.18	DC	Controllo	Discendente	
Frase C.12 e C.13	DC	Affermazioni	Controllo logico	

Tabella 1.4 - Analisi metodologica del Problema dei Cammini

Anche in questo caso, come nel Problema dei Fagioli, si possono distinguere in modo chiaro la componente di ricerca e quella deduttiva. La prima è caratterizzata dalla presenza costante della componente teleologica, mentre la seconda da quella epistemica.

Caratteristica della parte di protocollo riguardante la componente di ricerca è la presenza di immagini. La studentessa, dopo una larga fase di esplorazione in cui cerca di fare uno studio sistematico di tutti i casi, si rende conto della simmetria del problema e comincia a osservare solamente metà del triangolo. È questo il primo passo verso il raggiungimento della soluzione: studiando solo mezzo triangolo riesce ad esprimere in modo algebrico la situazione problema. La componente comunicativa in questa prima fase fa da sfondo alla risoluzione.

Il punto di transizione tra una componente e l'altra è caratterizzato dal passaggio da una formulazione algebrica del problema all'uso delle nozioni del calcolo combinatorio (conoscenza esterna). La studentessa, distaccata dalla situazione problema riesce ad arrivare a un risultato corretto. La componente epistemica è in primo piano in questa seconda parte, la componente comunicativa sempre presente, passa in risalto nella parte finale della risoluzione.

La presenza di immagini, anche in questo caso è limitata alla prima fase del problema, successivamente vengono sostituite dall'uso di un linguaggio algebrico.

6.1.3. Solitario Triangolare

Per l'analisi di questo protocollo lo suddivideremo nelle diverse fasi proposte da Miguel de Guzmán nel suo articolo del (1984).

Fase 1: Leggere le regole del gioco (fase di familiarizzazione)

Comincia in questa fase la **Componente di ricerca (IC)**, la studentessa inizia la fase di familiarizzazione dando una notazione adeguata al tavolo da gioco e successivamente iniziando a giocare.

Per realizzare l'esercizio, numero i buchi del tavolo da gioco per poter lasciare una traccia dei movimenti che sto facendo. All'inizio ci sono tutti i buchi pieni eccetto il numero 5.

Frase T.1

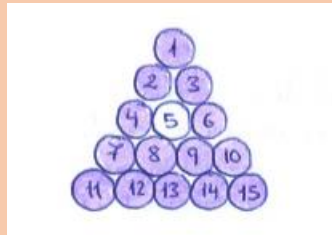


Figura 6.1.19

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto le regole del gioco, inizia a scrivere una notazione adeguata che la possa aiutare nella risoluzione.]

Osservo che si può iniziare solamente con due movimenti 14-9-5 o 12-8-5.

Frase T.2

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto le regole del gioco, inizia a osservare i possibili primi movimenti.]

La notazione che sceglie di usare la studentessa è molto chiara. Per esempio il movimento 14-9-5 significa che, data la posizione 5 vuota e la 14 e la 9 con una pedina, la pedina della posizione 14 "salta" sopra la pedina nella posizione 9 per arrivare nella posizione 5; intanto la pedina nella posizione 9 viene ritirata dal tavolo da gioco. Alla fine del movimento la configurazione sarà: una pedina nella posizione 5 e le posizioni 14 e 9 vuote.

Molto presto nella risoluzione la studentessa si rende conto della *simmetria* del tavolo da gioco e quindi della conseguente esistenza di soluzioni simmetriche tra loro.

Dato che si tratta di un triangolo equilatero, credo sia uguale da quale movimento iniziamo poichè con entrambi dovremmo arrivare a soluzioni "simmetriche".

Frase T.3

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto le regole del gioco, continua a osservare il tavolo da gioco tirando fuori tutte le possibili informazioni utili per la risoluzione.]

Ora la studentessa inizia a giocare al solitario facendo dei *tentativi senza una strategia specifica*.

Inizio a fare il solitario "a occhio".

Frase T.4

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver letto le regole del gioco, inizia a giocare al solitario senza una strategia specifica.]

I passi che farò sono: 14-9-5; 7-8-9; 12-13-14; 2-4-7; 11-7-4; 10-9-8; 3-6-10

Frase T.5

[Affermazione, modalità neutrale, la studentessa comincia a giocare.]

Ma i movimenti della studentessa non sono completamente aleatori, fa delle osservazioni accurate in questo tentativo, capendo che tipi di movimenti deve fare per riuscire ad eliminare determinate pedine.

A questo punto osservo che l'unico modo per eliminare l'1 sarebbe fare il movimento 8-5-3

Frase T.6

ya que por ambos deberiamos llegar a soluciones "simétricas"
 Los pasos que voy a dar son:
 14-9-5 ; 7-8-9 ; 12-13-14 ; 2-4-7
 11-7-4 ; 10-9-8 ; 3-6-10
 En este punto observo que la única manera de eliminar el 1, sería moviendo con 8-5-3

Para no dejar la esquina "sele" 2-4-7

No se puede resolver por este camino.

Non si può risolvere per questo cammino

Figura 6.1.20

Qui osservo già che [con questi movimenti] non si può risolvere perché il 4 non posso eliminarlo e le restanti pedine non si possono eliminare tra di loro.

Frase T.7

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver osservato il gioco, comincia a rendersi conto dei vari movimenti che deve fare per riuscire a eliminare le pedine in determinate posizioni.]

Sto pensando che ci sono moltissime combinazioni da provare e che sarei molto fortunata se lo risolvessi senza avere una strategia. Dall'altra parte non mi sono mai piaciuti questi tipi di giochi e mi fa arrabbiare pensare che dovrò dedicare molto tempo a risolverlo siccome sono molto impaziente.

Frase T.8

[Affermazione, modalità neutra]

Fase 2: Esplorare e eseguire le strategie

A questo punto la studentessa inizia a utilizzare la strategia del *ragionamento regressivo* per cercare di giungere alla soluzione del gioco. Questa volta in modo consapevole.

Mi rendo conto che posso provare ad andare all'indietro, cioè iniziando con una sola pedina in una posizione e disfacendo i salti fino a cercare di riempire il tavolo da gioco a eccezione di un buco.

Frase T.9

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

È curioso notare che la studentessa, in mancanza di un linguaggio adeguato, cerca di spiegare con parole sue i movimenti all'indietro sul tavolo da gioco. In particolare usa più di una volta, nel corso della risoluzione la dicitura "disfacendo i salti". Effettivamente quello che succede sul tavolo da gioco, il cambio di configurazione, in un movimento all'indietro è il contrario di quello che si verifica con un normale "salto" ovvero con un movimento consentito dalle regole del gioco.

La studentessa ora osserva il tavolo da gioco e decide, per applicare successivamente il ragionamento regressivo, di posizionare la pedina iniziale in una delle posizioni 4, 6 o 13 che ritiene migliori di altre siccome si può arrivare a esse mediante 4 movimenti differenti.

Osservando il tavolo da gioco penso che forse mi facilita la strategia il fatto che l'ultima pedina che rimane sul tavolo da gioco (la pedina dalla quale inizierò a muovere all'indietro) sia in una posizione alla quale si possa arrivare con molti salti. Questi posti sono le posizioni 4, 6 e 13 dato che si può arrivare a queste mediante 4 salti.

Frase T.10



Figura 6.1.21

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver formulato il piano di risoluzione, osserva il tavolo da gioco e decide di posizionare l'ultima pedina in una posizione specifica.]

Un esempio per chiarire. Alla posizione 13 si può arrivare mediante questi 4 movimenti (usiamo la notazione della studentessa): 11-12-13, 15-14-13, 4-8-13 e 6-9-13.

Dopo un'osservazione sul numero di movimenti totali che deve fare per risolvere il gioco, la studentessa inizia ad utilizzare la strategia del ragionamento regressivo in modo sistematico.

Per riempire il tavolo da gioco dovrò fare 13 movimenti, dato che ci sono 15 buchi, una pedina iniziale e un buco finale vuoto.

Frase T.11

[Affermazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver formulato il piano di risoluzione, fa delle osservazioni sullo svolgimento del gioco.]

A questo punto inizia ad utilizzare il *ragionamento regressivo*, lo utilizzerà non in modo aleatorio ma cercando, in un primo momento, di risolvere il gioco “per linee”, ovvero cercherà di riempire il tavolo da gioco linea dopo linea a partire dalla più bassa, mentre successivamente dividerà il tavolo da gioco in parti e cercherà di riempirle una alla volta.

Iniziamo solo con la pedina 13.

Frase T.12

Nel colloquio individuale ci soffermiamo sulla sua scelta della posizione iniziale della pedina.

Qui sì, ho utilizzato il ragionamento regressivo perché al principio ho iniziato a risolverlo in maniera normale e dopo molti tentativi con dei ceci non sono arrivata a niente; allora, siccome sapevo che alla fine doveva rimanere... [una sola pedina], beh presumibilmente doveva rimanere nel centro ma io l’ho lasciata qui sotto perché sapevo che questa era una soluzione, ho iniziato a fare movimenti all’indietro.

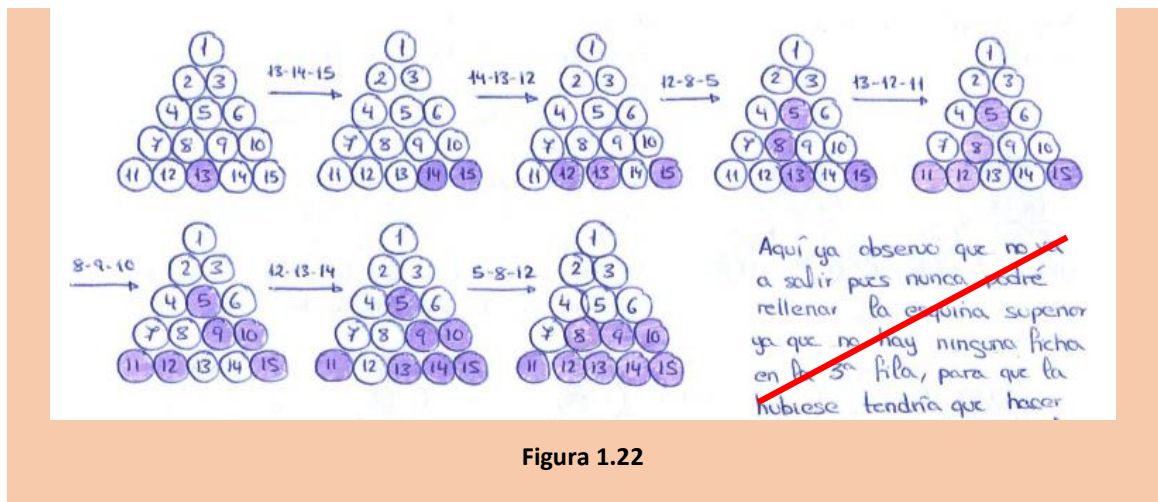
Video 14 - [MVI_0805] (minuti 0.19-0.42)

E successivamente spiega meglio il perché ha scelto proprio la 13 come posizione iniziale.

Siccome farlo era molto noioso mi sono messa in una pagina internet dove c'era il gioco. All'inizio mi sono videoregistrata con il telefonino per vedere se arrivavo a una soluzione e, alla fine, quando non stavo registrando con il telefonino, sono arrivata a una soluzione (ride) che risultò essere questa {indica la posizione 13 del tavolo da gioco disegnato sul suo protocollo}. Però non mi ricordavo come l'avevo fatto! Perché già ero molto stanca, continuavo a farlo e arrivai a questa [soluzione]. Così dissi: "Va bene, parto da questa e vedo se di qua mi risulta più semplice che partendo dal centro" e sì, [mi risultò più semplice], non so se è perché ci sono più soluzioni facendolo in questo modo che partendo dal centro, o...

Video 15 - [MVI_0805] (minuti 2.30-3.02)

La risoluzione del gioco è stata svolta dalla studentessa in parte in aula durante l'ora di lezione e in parte a casa. Qui spiega come, prima di iniziare a utilizzare il ragionamento regressivo, ha fatto molti tentativi per giungere a una soluzione. Non avendo un gioco fisico prova a cercare una versione sul web e trovandola la usa per fare delle prove. In questo modo riesce a trovare una soluzione che le servirà come partenza per applicare il ragionamento regressivo.



[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver formulato il piano di risoluzione, lo applica, seguendo l'idea di riempire il tavolo da gioco linea dopo linea.]

Quí observo già che non arrivo alla soluzione perché mai podrò riempire l'angolo superiore siccome non c'è nessuna pedina nella 3ª fila; perché ci sia [la pedina] dovrei fare 11-7-4 lasciando quindi l'angolo 11 senza pedina.

Frase T.13

[Affermazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver provato ad applicare il piano, si rende conto che il percorso che ha seguito non porta alla soluzione ed è in grado di spiegarne il perché.]

A questo punto la studentessa illustra il perché ha scelto di fare i passi rappresentati nella figura 6.1.22. Possiamo notare in questo momento che tutto il lavoro che sta facendo non è aleatorio.

Iniziamo con il perché dei vari passi:

13-14-15: Voglio iniziare riempiendo gli angoli il prima possibile perché sono i buchi più difficili da riempire (la pedina è nel buco 15 e non la andrò più a muovere).

14-13-12: (Movimento aleatorio).

12-8-5: Voglio lasciare libero il buco 12 per poter arrivare nel passo seguente all'angolo 11.

8-9-10: Voglio lasciare il buco 8 libero per quando poi ritiro la pedina 12 (per riempire 13 e 14) nel passo successivo, così dopo posso completare [la fila].

12-13-14: Voglio completare la fila di sotto.

5-8-12: Voglio completare la fila di sotto.

Frase T.14

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo aver formulato il piano di risoluzione, lo applica in modo non aleatorio.]

Possiamo notare in questa frase come la studentessa sta attenta al *ruolo delle pedine sul tavolo da gioco*, in particolare al fatto che gli angoli sono delle posizioni più complicate da raggiungere.

Ora la studentessa si rende conto che il piano da lei formulato non porta alla soluzione così che decide di cambiarlo.

Penso che cercare di riempire il centro non è stata una buona strategia ...

Frase T.15

[Affermazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo aver applicato il piano di risoluzione, si rende conto che non è stata una buona idea.]

... quindi ora cercherò di riempire la parte esterna del triangolo, cioè [cercherò di] disfare i salti verso gli angoli e i lati. (Giocare in modo normale sarebbe saltare verso il centro evitando gli angoli e i lati se possibile.)

Frase T.16

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Ora divide il tavolo da gioco in triangoli più piccoli, *decompone il problema*, e, usando sempre il ragionamento regressivo, decide di provare a riempirli uno alla volta terminando con il triangolo centrale, dove dovrà fare l'ultimo movimento per lasciare la posizione 5 libera. Questo è il momento decisivo all'interno della risoluzione, con questa nuova strategia la studentessa arriverà alla soluzione.

Inoltre mi fisso [sul fatto] che, mangiando pedine o disfacendo i salti, i movimenti che si fanno sono triangolari, quindi cercherò di riempire i triangoli più piccoli contenuti nel [triangolo] grande.

Frase T.17

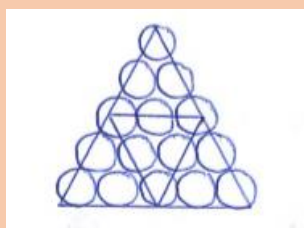


Figura 6.1.23

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Nel colloquio individuale spiega il perché della decisione di cambiare strategia.

Cercando di farlo “per linee” mi sono resa conto che per arrivare in cima c’era un problema perché non avevo spazio per fare movimenti. Siccome i movimenti [possibili] sono in diagonale, [...] i triangoli si possono formare più facilmente che le linee. Credo di ricordare che era... Ah sì! Perché la forma del solitario è triangolare e ho detto “beh, questo ha un trucco e... Sicuro che si può dividere in triangoli.”

Video 16 - [MVI_0805] (minuti 3.38-4.02)

Possiamo notare come la studentessa continui, anche nella risoluzione di un gioco, a lavorare per immagini. In questo caso, guardando la forma del tavolo da gioco le viene in mente di suddividerlo in triangoli.

A questo punto inizia ad applicare il piano formulato e a riempire triangolo dopo triangolo iniziando da quello in basso a destra, successivamente quello in alto, e così via in senso antiorario per terminare con quello centrale.

Per primo riempirò il triangolo inferiore destro

Frase T.18

Per poter riempire il 10 nel movimento successivo

Figura 6.1.24

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo la formulazione del piano, lo applica.]

Ora riempirò il triangolo superiore, per [fare] questo (siccome non voglio togliere la pedina che già ho collocato nella posizione 1), devo ottenere che ci sia qualche pedina nella 4° fila che, nel disfare il salto, mi riempia la 2° e 3° fila. Disfo il salto con la pedina 9.

Frase T.19

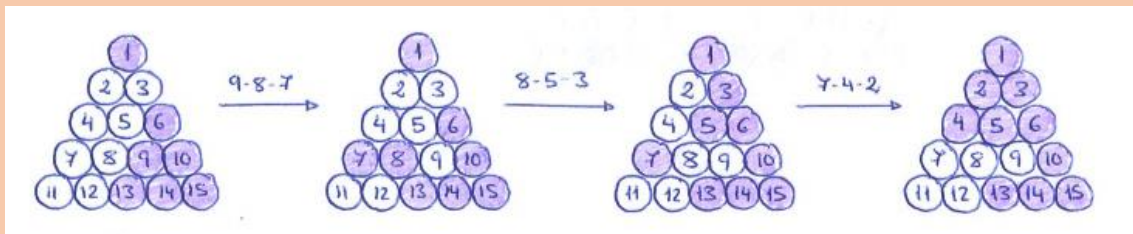
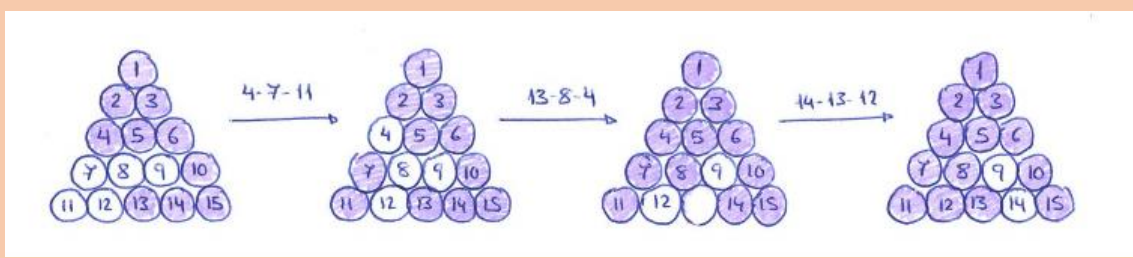


Figura 6.1.25

[Fase di esplorazione, modalità discendente, la studentessa, dopo la formulazione del piano, lo applica.]

Ora bisogna riempire il triangolo inferiore sinistro

Frase T.20



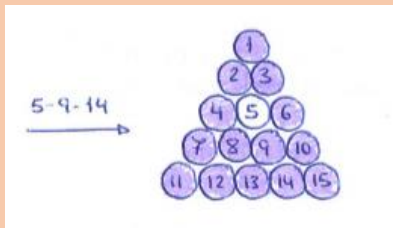


Figura 6.1.26

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, la studentessa, dopo la formulazione del piano, lo applica e arriva alla soluzione.]

Nel colloquio individuale parla della strategia utilizzata.

La strategia che ho seguito... È che io pensavo di dover andare avanti riempiendo zone. Siccome era un triangolo si poteva dividere in più triangoli e si doveva andare avanti a riempire i triangolini. Quindi i miei movimenti sono iniziati pensando a questo. Al principio non mi veniva [non riusciva a riempire i triangolini] fino a che non mi sono resa conto che per riempire i triangoli dovevo fare movimenti che forse non pensavo potessero portarmi a questo. [...] Ho iniziato riempiendo questo {indica il triangolo in basso a destra della figura 6.1.23} poi mi sono resa conto che potevo salire in alto. E la verità è che questo [la soluzione] l'ho ottenuto provando e provando perché non trovavo un senso matematico; sicuro che ce l'ha però non l'ho trovato e sono andata avanti riempiendo [i triangoli] e così ha funzionato... dopo molti e molti tentativi. [...] Ho pensato a questo schema {indica la figura 6.1.23 sul protocollo}, al modo di dividere il triangolo in più triangoli, ed era questo. E siccome alla fine si suppone che il buco deve rimanere nel centro ho pensato che questo {indica il triangolo centrale della figura 6.1.23} era l'ultimo triangolo che bisognava riempire e così sono arrivata alla soluzione.

Video 17 - [MVI_0805] (minuti 0.44-1.47)

Risulta molto chiaro da questa trascrizione la costanza della studentessa e la sua testardaggine, due fattori che lei stessa segnala nella sua risposta alla domanda *Aspetti affettivi* del Questionario 3.

{In questa prima parte del protocollo possiamo notare come la *componente teleologica* prevale sulle altre due, anche se queste sono comunque presenti, in particolare la *epistemica* nelle frasi T.7, T.13 e T.14 dove la studentessa si sofferma a osservare il procedimento seguito e a controllare se i passaggi per arrivare alla soluzione sono corretti. La *componente comunicativa* la troviamo invece, come quasi sempre nei suoi protocolli, nelle immagini e quindi nei diversi disegni e rappresentazioni grafiche dei movimenti e anche nell'uso di una notazione adeguata.}

Fase 3: Verificare i risultati

A questo punto la studentessa arrivata alla soluzione, decide di verificare il risultato ottenuto riscrivendo nell'ordine esatto i passaggi per arrivare alla soluzione del gioco.

Ora solamente devo scrivere i salti nell'ordine corretto:

Frase T.21

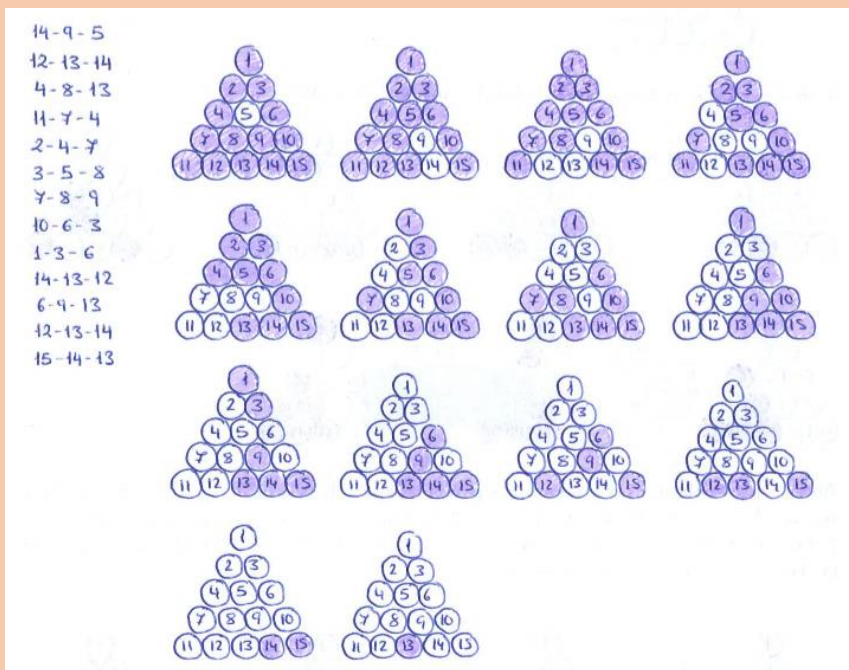


Figura 6.1.27

[Fase di controllo, modalità ascendente, la studentessa, dopo essere arrivata alla soluzione a rovescio, la controlla scrivendo i movimenti nell'ordine corretto e disegnando i vari passaggi.]

{In questa seconda parte del protocollo di risoluzione sparisce la componente teleologica mentre rimangono in primo piano quella *epistemica* e quella *comunicativa*.}

Approfondimenti: le difficoltà nel risolvere il Solitario

È stato chiesto alla studentessa se avesse avuto dei blocchi risolvendo il Solitario Triangolare siccome non ne aveva parlato e non aveva scritto nessuna annotazione al riguardo nel protocollo.

Sì, è che a me i solitari non piacciono, già all'inizio ho visto il solitario e non lo l'ho apprezzato molto però... a parte questo, facendo molti tentativi e molti tentativi e vedendo che non viene, diventa un'ossessione, per me è diventato un'ossessione.

Video 18 - [MVI_0805] (minuti 1.53-2.12)

Nelle risposta alla domanda *Aspetti affettivi* del questionario 3, la studentessa segnala di essere incline allo sconforto. Possiamo vedere invece qui che nonostante dica che il solitario per lei è diventato un'ossessione perché non riusciva a trovare una soluzione, prevale la sua costanza nel lavoro, altro aspetto segnalato nella risposta.

Considerazioni sullo svolgimento del solitario

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate evidenziando i punti di svolta nella risoluzione per il conseguimento della soluzione, la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
Fase 1: Fase di familiarizzazione		
Figura 1.19	<i>Fare disegni e rappresentazioni grafiche</i> (per tutto il protocollo)	
Frase T.3	<i>Approfittare della simmetria</i>	
Frase T.4-7	<i>Fare tentativi senza una strategia specifica</i>	
Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia		
Frase T.9	<i>Utilizzare il ragionamento regressivo</i> (da qui in avanti fino al termine della fase 2)	✓
Frase T.12	Congettura	
Frase T.14	<i>Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco</i>	
Frase T.17	<i>Decomporre il problema, semplificare</i>	✓
Fase 3: Verificare i risultati		
Figura 1.27	Soluzione	

Tabella 1.5 - Strategie di risoluzione del Solitario Triangolare

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase T.1 e Figura 1.19	IC	Esplorazione	Discendente	Comunicativa
Frase T.2 e T.3	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica
Frase T.4	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.5	IC	Affermazione	Neutrale	Teleologica e Comunicativa

Frase T.6	IC	Esplorazione	Ascendente	Teleologica
Figura 1.20 e Frase T.7	IC	Esplorazione	Ascendente	Epistemica e Comunicativa
Frase T.8	IC	Affermazione	Neutrale	Teleologica
Frase T.9	IC	Piano	Neutrale	
Frase T.10 e Figura 1.21	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase T.11	IC	Affermazione	Discendente	Teleologica
Frase T.12 e Figura 1.22	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase T.13	IC	Affermazione	Ascendente	Epistemica
Frase T.14	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.15	IC	Affermazione	Ascendente	Teleologica
Frase T.16	IC	Piano	Neutra	
Frase T.17 e Figura 1.23	IC	Piano	Neutra	
Frase T.18 e Figura 1.24	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase T.19 e Figura 1.25	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.20 e Figura 1.26	IC	Esplorazione	Ascendente	Epistemica e Comunicativa
Frase T.21 e Figura 1.27	IC	Controllo	Ascendente	

Tabella 6.1.6 - Analisi metodologica del Solitario Triangolare

Questo protocollo è composto solamente dalla componente di ricerca. Si può notare molto bene dalla tabella riassuntiva l'alternanza tra le fasi di esplorazione e la formulazione dei piani di risoluzione. Infatti dopo una prima esplorazione iniziale la studentessa decide di iniziare ad utilizzare la strategia del ragionamento regressivo (Frase T.9). In seguito a una seconda esplorazione in cui prova a fare i movimenti all'indietro, cercando di riempire il tavolo da gioco linea per linea, si rende conto che questa strategia non funziona e la cambia. Dividendo il tavolo da gioco in triangoli e cercando di risolverli uno alla volta arriverà alla soluzione. Molto chiara è l'alternanza delle modalità ascendente e discendente.

La componente comunicativa della razionalità fa da sfondo a tutto lo svolgimento del protocollo, invece, osservando la tabella si può notare molto bene l'alternanza tra le componenti teleologica ed epistemica. La prima è presente principalmente nelle fasi di esplorazione discendente e nella formulazione dei piani, la seconda è caratteristica di alcune modalità ascendenti. La studentessa infatti esercita un controllo costante sul suo operato: quando applica una strategia, se osserva che non la sta aiutando nella risoluzione, riesce ad individuare i punti deboli ed a modificare la tecnica fino a raggiungere l'obiettivo.

Anche in questo protocollo, come nei due precedenti, le immagini sono una parte importante, sia per le fasi di esplorazione che per quelle di controllo. La studentessa comunica al lettore, mediante le stesse, il processo di risoluzione.

L'uso della strategia del ragionamento regressivo, in questo caso, è consapevole. È la principale tecnica che viene utilizzata nella risoluzione per giungere alla soluzione. Il fatto di vedere chiaramente quale è la soluzione del problema aiuta la studentessa a sviluppare questa strategia consciamente. È curioso notare che l'alunna non cerca sistematicamente delle posizioni vincenti, ovvero delle configurazioni che la porteranno alla conclusione svolte nell'ordine corretto, ma combina la strategia con la decomposizione del tavolo da gioco: prima dividendolo in file e dopo in triangoli.

6.1.4. Solitario della Bastiglia

Anche il protocollo del Solitario della Bastiglia lo suddividiamo in parti come quello precedente. Qui la studentessa lavora in coppia con una sua compagna, Mercedes. Le due studentesse sono amiche e lavorano molto bene insieme, infatti sono una delle due coppie che riesce ad arrivare ad una soluzione nonostante il poco tempo a disposizione.

Fase 1: Leggere le regole del gioco (fase di familiarizzazione)

Comincia in questa fase la **Componente di ricerca (IC)**, le due studentesse iniziano a giocare al solitario utilizzando la pagina web. Fanno dei *tentativi senza utilizzare una strategia specifica*.

Abbiamo cominciato facendo movimenti aleatori.

Frase P.1

[Fase di esplorazione, modalità discendente, le due studentesse, dopo aver letto le regole del gioco, provano a far dei movimenti sul tavolo da gioco cercando, senza una strategia specifica di arrivare alla soluzione.]

Successivamente spiegano la notazione che decidono di utilizzare per poter lasciare una traccia dei movimenti eseguiti giocando.

Quando ci hanno distribuito il foglio con l'enunciato, abbiamo messo una notazione, la più semplice possibile.

Decidiamo di numerare le caselle dall'1 alla 33 (come nel disegno [Figura 6.1.28]).

Per indicare un movimento scriviamo $x \rightarrow y$, dove x è la casella dalla quale parte la pedina e y la casella nella quale si ferma.

(Per esempio $1 \rightarrow 3$ vuole dire che muoviamo da 1 a 3 e eliminiamo la pedina che è in 2).

Frase P.2

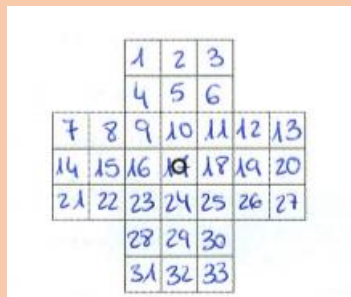


Figura 6.1.28

[Affermazioni, modalità neutrale]

La notazione, come si può facilmente notare, è differente da quella utilizzata nel protocollo del Solitario Triangolare di Miriam, infatti deriva dal protocollo del Solitario Triangolare redatto da Mercedes.

Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia

A questo punto le studentesse iniziano a formulare una strategia, in particolare decidono di *decomporre il problema approfittando della simmetria* dello stesso.

Dividiamo il tavolo da gioco in quattro parti più o meno uguali nel modo seguente:

Frase P.3

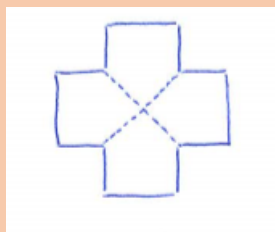


Figura 6.1.29

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, le due studentesse, dopo aver osservato il tavolo da gioco, decidono di dividerlo in quattro parti sfruttandone la simmetria.]

Possiamo notare che sembra che ci sia un passaggio di idee dalla risoluzione del Solitario Triangolare per quanto riguarda l'uso della strategia di *semplificare il problema scomponendolo*. Questo passaggio viene confermato dalla studentessa nel colloquio individuale.

Questo l'ho visto molto simile al precedente, e quindi non mi è piaciuto, però... Siccome questo {indica il protocollo del Solitario Triangolare}, per risolverlo, l'ho diviso in triangoli, ho detto a Mercedes che qui potevamo dividerlo in quadrati. Quindi ho detto: "cerchiamo di risolvere una parte del Peg, e vediamo se dopo facendo gli stessi movimenti si possono risolvere le [altre] quattro". All'inizio abbiamo fatto dei tentativi per risolvere questa qui {indica la parte sinistra della croce, Figura 6.1.28}, mi sembra... e siamo arrivati alla conclusione che, con una serie di movimenti, si risolveva [si svuotava dalle pedine la parte di cui sta parlando]. Dopo abbiamo dovuto fare attenzione perché dovevi renderti conto quale movimento facevi per ultimo, per [poi] passare da quest'area {indica il braccio sinistro della croce} a questa {indica il braccio inferiore della croce} e poter iniziare [a svuotarla] con gli stessi movimenti che [avevamo usato] qui {indica il braccio sinistro della croce}. E così abbiamo fatto fino che alla fine rimaneva, credo, solamente [...] la parte del centro e già eravamo arrivate alla soluzione. Ma questo lo abbiamo potuto risolvere per [merito di] questo {indica il protocollo del Solitario Triangolare} perché avevamo preso l'idea dal solitario triangolare.

Video 19 - [MVI_0807] (minuti 0.18-1.18)

Da questo minuto trascritto si può notare che effettivamente l'idea di dividere il tavolo da gioco in parti arriva dalla risoluzione del Solitario Triangolare da parte di Miriam. Le studentesse cercano di svuotare una parte cercando una regolarità, dei movimenti che si possano ripetere, modificandoli leggermente, per svuotare altre parti del tavolo da gioco.

Svuotiamo il tavolo da gioco per sezioni. Cominciamo dalla sezione sinistra, dopo continuiamo con quella inferiore, continuiamo con quella di destra e terminiamo con quella superiore.

Frase P.4

[Fase di esplorazione, modalità discendente, le due studentesse, dopo aver formulato un piano di risoluzione, lo applicano.]

Nel colloquio individuale spiega meglio il processo seguito.

[...] abbiamo scoperto i movimenti per svuotare quest'area completamente {indica la parte sinistra della figura 6.1.29} e dopo, nella nostra testa era come se girassimo la figura e tornassimo a fare gli stessi movimenti, [...] credo che alla fine non erano esattamente gli stessi movimenti perché, certo, togliendo da questa area [delle pedine, ne] togli anche un po' dal centro ma era più o meno come guardare la figura girata e passare a un'altra area però con gli stessi movimenti.

Video 20 - [MVI_0807] (minuti 1.42-2.06)

Le studentesse riescono a trasportare i movimenti osservati ad altre parti del tavolo da gioco. Si immaginano il tavolo da gioco ruotato e così possono applicare di nuovo i movimenti appresi svuotando il primo braccio.

Dopo alcune sperimentazioni in più siamo arrivate alla soluzione.

Frase P.5

[Affermazione, modalità neutrale]

La nostra soluzione si ottiene seguendo questi passi:

Frase P.6

① 15 → 17	⑩ 28 → 16	⑲ 27 → 25	trabajo ya una solución
② 4 → 16	⑪ 21 → 23	⑳ 12 → 26	
③ 17 → 15	⑫ 16 → 28	㉑ 13 → 27	⑳ 18 → 6 ㉑ 3 → 11 ㉒ 12 → 10 ㉓ 5 → 17.
④ 28 → 16	⑬ 33 → 25	㉒ 18 → 30	
⑤ 25 → 23	⑭ 28 → 30	㉓ 10 → 12	
⑥ 16 → 28	⑮ 31 → 33	㉔ 27 → 25	
⑦ 21 → 23	⑯ 26 → 24	㉕ 30 → 18	
⑧ 7 → 21	⑰ 33 → 25	㉖ 3 → 11	
⑨ 8 → 22	⑱ 24 → 26	㉗ 1 → 3	

Figura 6.1.30

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, le studentesse, dopo aver seguito il piano formulato, giungono a una soluzione e la esplicitano con la notazione inventata.]

{Possiamo notare come nella stesura di questo protocollo sia praticamente assente la componente *epistemica* mentre sono presenti quella *comunicativa*, nella stesura della

notazione e della soluzione, e quella *teleologica*, nella formulazione del piano di risoluzione e nella sua attuazione.}

Approfondimenti: la decomposizione del tavolo da gioco sfruttata dalle due studentesse

Dall’analisi della soluzione trovata dalle due studentesse, abbiamo potuto isolare dei movimenti ripetuti e suddividere il tavolo da gioco in insiemi di caselle che nel capitolo 3 abbiamo chiamato “blocchi”. Illustriamo la soluzione delle due studentesse esplicitando i blocchi utilizzati per essere più chiari.

Innanzitutto elenchiamo i tipi di blocchi utilizzati dalle due studentesse, quei movimenti ripetuti che permettono di svuotare parti del tavolo da gioco lasciando intatto tutto il resto. Entrambi i tipi di blocco sfruttano una pedina catalizzatrice esterna segnata in viola.

- ✓ Insieme di tipo 1: Blocco rettangolare 3x1 con l’uso di 2 caselle esterne

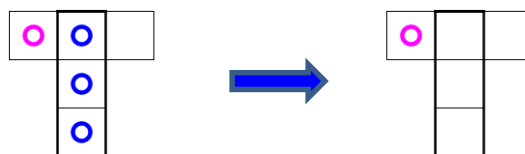


Figura 6.1.31

- ✓ Insieme di tipo 2: Blocco rettangolare 3x2 con l’uso di 3 caselle esterne

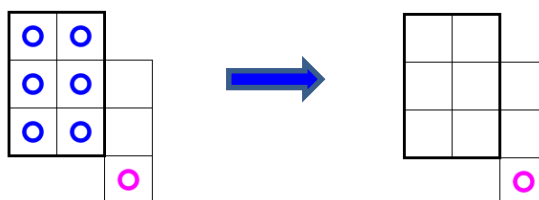


Figura 6.1.32

La configurazione che rimane, dopo lo svuotamento dei differenti blocchi è quella della figura 6.1.33.

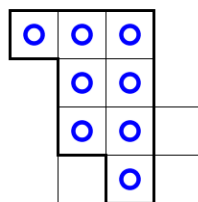


Figura 6.1.33

E con pochi movimenti, usando solamente le due caselle esterne all'insieme di pedine, le due studentesse riescono a risolvere il gioco lasciando l'ultima pedina nella posizione centrale, ovvero, rispetto all'insieme di pedine considerato, quella con la pedina fuxia nella figura 6.1.34.

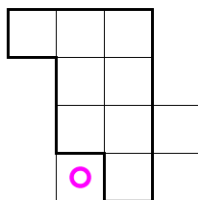


Figura 6.1.34

La figura 6.1.35 rappresenta la divisione utilizzata dalle due studentesse nella risoluzione del solitario.

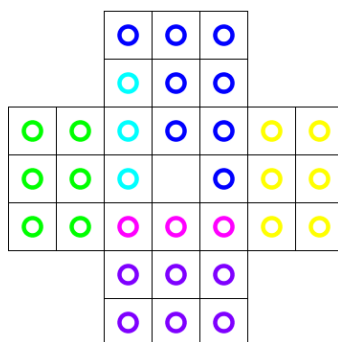


Figura 6.1.35

Le studentesse svuotano le aree evidenziate nell'ordine azzurro (insieme di tipo 1 ruotato 180° e specchiato), fuxia (insieme di tipo 1 ruotato di 90° in senso antiorario), verde (insieme di tipo 2), viola (insieme di tipo 2 ruotato di 90° in senso antiorario), giallo (insieme di tipo 2 ruotato di 180°) e blu.

Considerazioni sullo svolgimento del solitario

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate evidenziando i punti di svolta nella risoluzione per il conseguimento della soluzione, la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
Fase 1: Fase di familiarizzazione		
Frase P.1	<i>Fare tentativi senza una strategia specifica</i>	
Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia		
Frase P.3	<i>Decomporre il problema, semplificare</i> <i>Approfittare della simmetria</i>	✓
Figura 1.29	<i>Fare disegni e rappresentazioni grafiche</i>	
Figura 1.30	Soluzione	

Tabella 6.1.7 – Strategie di risoluzione del Solitario della Bastiglia

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase P.1	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica
Frase P.2 e Figura 1.28	IC	Affermazioni	Neutrale	Teleologica e Comunicativa
Frase P.3 e Figura 1.29	IC	Piano	Ascendente	Teleologica
Frase P.4	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase P.5	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase P.6 e Figura 1.30	IC	Esplorazione	Ascendente	Comunicativa

Tabella 6.1.8 - Analisi metodologica del Solitario della Bastiglia

Anche in questo caso, come nel protocollo del primo solitario proposto, è presente solamente la componente di ricerca. Si nota immediatamente la differenza nell'uso delle immagini: in questo protocollo spariscono quasi completamente. Molto probabilmente questo è dovuto al fatto che alle studentesse è stato fornito un supporto visivo che le aiutasse nella risoluzione: la possibilità di utilizzare una pagina web dove poter giocare al solitario. In questo protocollo l'alternanza tra fase di esplorazione e formulazione di piani di risoluzione va di pari passo con l'alternanza di modalità discendenti e ascendenti. Sono presenti la componente teleologica e sullo sfondo quella comunicativa, mentre quella epistemica sembra assente.

L'idea di decomporre il problema, ribadisce più volte la studentessa nel colloquio individuale, arriva dalla risoluzione del Solitario Triangolare. Questo è un esempio di trasferimento delle conoscenze apprese da un'attività a un'altra. Sicuramente la similitudine tra i due solitari (si veda il capitolo 3) aiuta la studentessa a fare un collegamento tra i due.

6.2. SECONDO STUDIO DI CASO: MARTÍN

Dall'analisi delle sue risposte ai questionari attitudinali risulta che lo studente è interessato ai giochi da tavola e non a quelli al computer, non pratica nessun tipo di gioco. Fa parte quindi del quarto profilo: *studente interessato ai giochi ma, che non pratica nessun tipo di gioco*. (Si veda capitolo 4)

Per quanto riguarda il secondo questionario è interessante la sua risposta alla domanda 2:

“Credo che le sfide in generale, e quelle intellettuali in particolare, fanno parte dell'ambizione umana, sia nel senso di competizione che in quello di cooperazione. Per la risoluzione penso che si faccia uso delle stesse strategie mentali che hanno utilizzato gli esseri umani in questioni di sopravvivenza, che alla fine è quello che determina la nostra perpetuazione come specie.”

Si può notare come lo studente veda la connessione tra le strategie tipiche della risoluzione dei giochi e quelle che sono state usate e si usano nella vita reale.

È d'accordo con l'uso dei giochi nella didattica della matematica e, in particolare, sostiene che “quello che si ottiene con l'uso dei giochi è affinare certe routine cerebrali che possano servire per migliorare alcuni aspetti dell'apprendimento della matematica”. Viene quindi inserito nel primo profilo: *studente favorevole all'uso dei giochi nella didattica e con un'alta opinione sugli stessi*. Dalla combinazione di questi due profili risulta far parte della categoria NGF: *non giocatori favorevoli all'uso dei giochi nella didattica*. (Si veda capitolo 4)

Come segnalato in precedenza non c'è una risoluzione dettagliata dei problemi passo per passo, ma i protocolli di risoluzione sono stati redatti dallo studente successivamente allo svolgimento. In ogni caso le strategie utilizzate sono descritte in modo conciso ma chiaro.

6.2.1. Problema dei Fagioli

Fase unica: Esplorare e eseguire la strategia

Inizia con questa fase la **Componente di ricerca (IC)**, la studente inizia a risolvere il problema senza una strategia specifica, seguendo il testo del problema.

Iniziai senza utilizzare nessun metodo. In modo diretto.

Frase A.1

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver letto il testo del problema, inizia la sua risoluzione.]

Lo studente inizia a risolvere il problema facendo *uso delle nozioni apprese di probabilità*.

Iniziai facendo conti, calcolando probabilità passo per passo. In realtà le probabilità non le calcolai in modo discreto, ma “immaginati” una miscela di fagioli... come se stessi mescolando liquidi.

Frase A.2

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, lo studente, dopo aver cominciato a esplorare il problema, formula un piano per risolverlo.]

Utilizzai frazioni e ogni volta con denominatori più grandi.

Frase A.3

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente inizia ad applicare le nozioni apprese di probabilità, pensando che il problema sia simile agli esercizi tipici della materia.]

A questo punto, capisce che il metodo che sta usando non è efficiente per arrivare alla soluzione.

Questo metodo complicava la risoluzione.

Frase A.4

[Affermazione, modalità ascendente, lo studente esercita un controllo sul suo operato e si rende conto che non è un metodo molto efficace.]

Arriva comunque, nonostante le difficoltà, ad un risultato: il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e rossi nel sacco bianco deve essere lo stesso. Siccome la sua intuizione iniziale era diversa dal risultato trovato si incaponisce, continuando a provare a risolvere il problema per arrivare ad ottenere la soluzione errata che lui aveva in mente.

Non cercai di contare molto, mi fermai in una posizione di stallo, ovvero nel “falso errore” che i due sacchi mi davano la stessa quantità: quando l’intuizione mi diceva in modo errato che avrebbero dovuto darmi [valori] differenti.

Frase A.5

[Congettura, modalità neutrale]

È interessante notare che la prima intuizione dello studente è stata quella che il numero di fagioli bianchi nel sacco rosso e rossi nel sacco bianco non doveva essere lo stesso. Risolvendo il problema, usando le nozioni di probabilità, arriva alla conclusione che invece il numero è lo stesso. Convinto che la sua prima intuizione era corretta, e

forse non aiutato dal fatto che i calcoli lo portavano a frazioni con denominatori molto grandi e quindi più difficili da maneggiare, continuò a persistere nella sua idea e a provare e riprovare più volte a risolvere il problema cercando di giungere alla soluzione da lui prevista. Risolvendo il problema infatti era arrivato a una soluzione diversa dalla sua intuizione, una soluzione che lui pensava invece essere sbagliata. Successivamente alla risoluzione fu proposta in classe una soluzione al problema (Capitolo 2) ed è a questo punto che lo studente capisce che quello che lui pensava essere l'errore in realtà era il risultato corretto, per questo nella frase A.5 scrive "falso errore".

Mi avvicinai [al problema] una, due volte con lo stesso metodo, che non mi dava niente di nuovo, e non fui capace a costruire una equazione generale che mi desse con chiarezza il fatto che le differenze avrebbero dovuto essere uguali in ognuno dei due sacchi per complicato che fosse il denominatore che c'era in ogni caso.

Frase A.6

[Formulazione di un piano, modalità discendente, lo studente, vedendo che non riesce ad arrivare alla soluzione che ha immaginato, cerca di costruire una equazione che gli chiarisca i dubbi.]

Possiamo notare come lo studente cerca una giustificazione al fatto che l'intuizione gli sta dicendo una cosa mentre la risoluzione del problema un'altra. Cerca così di costruire un'equazione che gli possa dimostrare quale delle due soluzioni è quella corretta, ma senza successo.

{In questo protocollo sono presenti in primo piano la *componente teleologica* e la *componente comunicativa*. Lo studente racconta cosa è successo durante la risoluzione del problema. È presente la *componente epistemica*, soprattutto nella frase A.6 dove lo studente spiega di aver fatto diversi tentativi e di aver cercato una formulazione algebrica per poter verificare le sue ipotesi.}

Considerazioni sulla risoluzione del problema

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate per il conseguimento della soluzione; la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate
Fase unica: Esplorare e eseguire la strategia	
Frase A.2-3	<i>Fare uso delle nozioni apprese di probabilità</i>
Frase A.5	Risultato (che pensa essere sbagliato)
Frase A.6	<i>Usare un linguaggio algebrico</i>

Tabella 6.2.1 - Strategie di risoluzione del Problema dei fagioli (Martín)

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase A.1	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase A.2	IC	Piano	Ascendente	
Frase A.3	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase A.4	IC	Affermazione	Ascendente	
Frase A.5	IC	Congettura	Neutrale	
Frase A.6	IC	Piano	Discendente	Epistemica e Comunicativa

Tabella 6.2.2 - Analisi metodologica del Solitario della Bastiglia

La componente di ricerca è l'unica componente che compare in questo protocollo. Nonostante il fatto che questo sia sintetico si può notare l'alternanza delle fasi di esplorazione con la formulazione dei piani. La componente comunicativa rimane sullo sfondo per tutto il protocollo. Quella teleologica è in primo piano nella prima parte, quando lo studente prova a risolvere il problema utilizzando le nozioni di probabilità, mentre ritroviamo la componente epistemica nell'ultima frase della stesura, dove lo studente afferma di aver provato a costruire delle equazioni (componente teleologica) per controllare la prima fase del suo lavoro (componente epistemica).

Lo studente si intestardisce seguendo la sua intuizione e prova e riprova ad utilizzare le nozioni di probabilità, per risolvere il problema e arrivare alla sua congettura, nonostante non sia una strategia efficiente. In un certo momento si rende conto che, comunque, questa strategia, per quante volte provi a riutilizzarla, porta al risultato che le due quantità da considerare sono le stesse. Solamente a questo punto cambia strategia cercando di verificare il risultato ottenuto. Molto probabilmente per mancanza di tempo non riesce a giungere alla conclusione. In una delle sue risposte al questionario 3, precisamente alla domanda *Aspetti affettivi*, lo studente afferma di seguire principalmente la sua intuizione. Troviamo in questo una possibile giustificazione al suo comportamento. Molto probabilmente, essendo abituato a fidarsi della sua intuizione, si intestardisce e seguendola, purtroppo, non riesce a terminare il problema.

6.2.2. Problema dei Cammini

Fase unica: Tracciare un piano per risolverlo e metterlo in pratica

Inizia con questa fase la ***Componente di ricerca (IC)***.

Per prima cosa lo studente incomincia a *contare sistematicamente tutti i cammini possibili* "partendo da ogni livello" ovvero contando, per ogni numero presente nel triangolo, quanti segmenti possibili lo collegano al successivo.

Nella ricerca del risultato finale, mi impegnai a contare il numero di cammini che c'erano [a partire] da ogni "livello", ovvero da ogni "3", da ogni "6", eccetera.

Frase C.1

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver letto il testo del problema, inizia a contare sistematicamente il numero di cammini nel triangolo.]

Con questo metodo ottiene un risultato.

Quando arrivai a un risultato numerico, utilizzando questo metodo, mi diede 49 e credetti che fosse 7 al quadrato.

Frase C.2

[Congettura, modalità ascendente, lo studente dopo aver trovato un risultato cerca di generalizzarlo legandolo al numero 7, ovvero all'ordine del triangolo.]

Possiamo notare come lo studente non si accontenta solamente di ottenere il risultato dell'esercizio ma cerca di relazionarlo con l'ordine del triangolo numerico considerato. In questo modo, utilizzando la formula generale che ha trovato (n^2), può poi verificare se la conclusione a cui è giunto è corretta o meno, applicando l'espressione generica ad ordini differenti. Riduce le dimensioni del problema e verifica la sua congettura: questo sarà un punto di svolta per arrivare alla soluzione.

Per verificarlo, ridussi le dimensioni del problema e mi resi conto che non andava bene. Non ricordo esattamente cosa successe, probabilmente mi dimenticai di contare alcuni cammini.

Frase C.3

[Fase di controllo, modalità discendente, lo studente cerca di verificare la congettura provando a risolvere un caso più piccolo.]

Dopo aver ridotto le dimensioni del problema può verificare la sua idea. Si rende conto che non è corretta. Prova così a calcolare il numero di cammini in un triangolo di ordine inferiore e a trovare una nuova relazione tra il risultato che ottiene e l'ordine del triangolo che sta considerando. Ricorrendo ai triangoli di ordine inferiore riesce a trovare la relazione cercata arrivando così a una formula generale *tramite un processo induttivo*.

Ma adesso, avevo trovato il modo di estendere una formula che funzionava per dimensioni più piccole fino alla dimensione 7.

Frase C.4

[Congettura, modalità ascendente, lo studente, dopo aver osservato casi più piccoli, riesce a trovare una formula generale che valga per tutti gli ordini di triangolo.]

Questa formula è $2^n - 1$, che darebbe 127.

Frase C.5

[Affermazione, modalità neutrale]

La formula generale che trova è la formula che lega l'ordine del triangolo al numero di cammini possibili.

{In questo protocollo di risoluzione, come nel precedente, sono presenti le tre componenti. In particolare la frase C.3 esprime molto bene la *componente epistemica*, mentre la C.6 quella *comunicativa*, nelle altre frasi quella *teleologica* è in primo piano rispetto alle altre due.}

Considerazioni sulla risoluzione del problema

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: una prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate, evidenziando i punti di svolta nella risoluzione per il conseguimento della soluzione; una seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
Fase unica: Esplorare e eseguire la strategia		
Frase C.1	<i>Fare uno studio sistematico di tutti i casi</i>	
Frase C.3	<i>Risolvere un problema più semplice</i>	✓
Frase C.4	<i>Praticare l'induzione</i>	
Frase C.5	Risultato	

Tabella 6.2.3 – Strategie di risoluzione del Problema dei Cammini (Martín)

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	<i>IC/DC</i>	<i>Azione</i>	<i>Modalità</i>	<i>Componenti</i>
Frase C.1	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica
Frase C.2	IC	Congettura	Ascendente	Comunicativa
Frase C.3	IC	Controllo	Discendente	Epistemica
Frase C.4	IC	Congettura	Ascendente	Teleologica
Frase C.5	IC	Affermazione	Neutrale	Comunicativa

Tabella 6.2.4 – Analisi metodologica del Problema dei Cammini

Anche in questo caso è presente solamente la componente di ricerca. Questa è caratterizzata da un'alternanza di esplorazioni e congetture per quanto riguarda le azioni e, in corrispondenza, una successione di fasi discendenti e ascendenti per quel che concerne le modalità. Possiamo notare come in questo caso non ci sia una componente della razionalità che prevale sulle altre per un'ampia parte di protocollo, ma c'è un'alternanza tra queste. La componente teleologica è presente nelle fasi di esplorazione in cui lo studente pianifica le strategie da usare, mentre troviamo quella comunicativa quando lo studente espone prima la congettura e poi il risultato tramite due formule generali. La componente epistemica ha un ruolo fondamentale nella risoluzione. Lo studente dopo aver formulato la sua congettura, ovvero che il numero di cammini potrebbe essere n^2 , controlla la sua affermazione riducendo le dimensioni del problema. Durante l'osservazione dei triangoli di ordine inferiore si rende conto che la sua congettura non è corretta, approfitta quindi delle piccole dimensioni per cercare un'altra formula generale attraverso il ragionamento induttivo. Questa effettivamente è una strategia efficace per la risoluzione del problema. Dall'analisi delle strategie usate dal gruppo di studio è risultato che tutti quelli che hanno proceduto come Martín sono arrivati ad ottenere una formula generale.

6.2.3. Solitario Triangolare

Fase 1: Leggere le regole del gioco (fase di familiarizzazione)

Inizia con questa fase la **Componente di ricerca (IC)**. Lo studente inizia il gioco *facendo dei tentativi senza una strategia specifica*.

La risoluzione del gioco la completo in due giorni differenti; il primo mi limito a giocare 5 partite...

Frase T.1

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver letto le regole del gioco, inizia a sperimentare senza una strategia specifica.]

Dopo aver giocato alcune volte senza raggiungere la soluzione, ha l'idea di usare il *ragionamento regressivo*. Nel questionario 5, parlando dell'uso della strategia nella risoluzione affermerà "non fu un pensiero innato, qualcuno lo disse e rimasi con quest'idea."

...e rimanere con l'idea che forse è possibile risolvere il gioco al contrario, cioè, partire da una situazione nella quale il gioco è risolto e cercare di lasciare le pedine nel tavolo da gioco come nella situazione originale.

Frase T.2

[Formulazione di un *piano, modalità ascendente*, lo studente, dopo aver provato a giocare un po' di volte, formula un piano per la risoluzione del solitario.]

Lo studente specifica meglio quello che successe nell'ora di lezione. In particolare si può vedere come, nonostante sia un gioco solitario, lui e i suoi compagni cerchino di trasformarlo in un gioco di competizione gareggiando gli uni contro gli altri per fare ogni volta meglio. La motivazione data dal cercare di fare meglio dei compagni potrebbe essere una spinta positiva per il raggiungimento della soluzione. È probabile che proprio uno di questi compagni sia stato quello che ha parlato del ragionamento regressivo.

In queste 5 giocate, in classe, sia i miei compagni che io dicevamo a voce alta quante pedine eravamo capaci di lasciare nel tavolo da gioco. Il risultato più frequente era lasciare 5 pedine sul tavolo da gioco, e qualche volta, eccezionalmente, riuscimmo a lasciarne 4.

Frase T.3

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente prova a terminare il gioco dopo averne lette le regole.]

Dire il risultato ad alta voce ci aiutava a motivarci, in un certo modo ci mettevamo in competizione. In qualunque caso, in questo primo tentativo non avanzammo molto, non ci segnammo i risultati e non memorizzammo schemi. La lezione terminò e rimase come esercizio per casa.

Frase T.4

[Affermazione, modalità neutra]

Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia

A questo punto lo studente inizia a raccontare la risoluzione del gioco prodotta in casa, da solo. Possiamo notare che la continuazione del protocollo è molto diversa dalla parte che è stata analizzata fino ad ora. La risoluzione passa da essere aleatoria a sistematica. Procedendo nella risoluzione lo studente formula piani diversi e in alcuni casi miglioramenti degli stessi in modo sistematico, per riuscire a raggiungere la soluzione.

Il secondo giorno, che sì, terminai la risoluzione del gioco, mi segnai quello che osservai in ogni tentativo (non in tutti i tentativi).

Frase T.5

[Affermazione, modalità neutra]

Comincia ad osservare attentamente le conseguenze dei movimenti all'interno del tavolo da gioco e identifica le posizioni delle pedine che sono più difficili da riempire. Inizia insomma a *ricoscerne il ruolo*.

All'inizio osservai che quando rimaneva una fila di pedine "disconnessa" dal resto era impossibile risolvere il gioco. Scoprii anche, con poche partite, che bisognava evitare che negli angoli rimanessero pedine isolate.

Frase T.6

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, lo studente, dopo aver giocato qualche volta, inizia a notare delle caratteristiche del gioco che possono servirgli per la risoluzione.]

A questo punto lo studente inizia effettivamente ad utilizzare il *ragionamento regressivo*...

A partire dal quarto tentativo mi stancai della strategia e decisi di provare il metodo del ragionamento regressivo.

Frase T.7

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

...scontrandosi con il fatto che con la strategia non osserva risultati immediati ma, anzi, sembra che non migliorino le possibilità di risoluzione.

In questo tentativo osservai un fallimento. Credevo che avrei ottenuto risultati immediati, comunque, notai che mi rimanevano file o pedine isolate con la stessa facilità che giocando da zero.

Frase T.8

Nel colloquio lo studente afferma che non ottiene quello che sperava utilizzando questa strategia. E scrive:

È come il problema duale: ho lo stesso problema che all'inizio.

Frase T.9

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver formulato il piano di risoluzione, cerca di applicarlo al gioco.]

Ora cerca di combinare il ragionamento regressivo con altre nozioni apprese nel corso dei vari tentativi per raggiungere la soluzione. In particolare che gli angoli sono difficili da riempire. Quindi inizia a muovere le pedine in modo che, per prima cosa, queste arrivino nelle suddette posizioni. Questo è un punto importante nella risoluzione. Concentrandosi sugli angoli si avvia sulla strada della soluzione.

Nel quinto tentativo cerco di evitare di lasciare isolati gli angoli e scopro, ora sì, che è molto più facile fare questo con il metodo del ragionamento regressivo che con il metodo diretto.

Frase T.10

[Formulazione di un piano, modalità neutra e fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente decide di prestare attenzione alla posizione delle pedine; in particolare il suo obiettivo in questo momento è posizionare delle pedine nelle posizioni angolari, gioca così seguendo l'obiettivo.]

La prima volta che cerco di farlo ottengo di non lasciare isolate 2 dei 3 angoli.

Frase T.11

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, usando il ragionamento regressivo e con l'obiettivo di riempire prima di tutto le posizioni angolari, continua a cercare una soluzione.]

A questo punto prova a cambiare la posizione della pedina iniziale sul tavolo da gioco continuando ad usare il ragionamento regressivo.

Torno a provarci cambiando di posto la prima (ultima) pedina del tavolo da gioco, cercando degli schemi.

Frase T.12

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Nel colloquio racconta che questo spostamento è stato fatto nel centro del tavolo da gioco, ovvero nella posizione che, alla fine dei movimenti, usando il ragionamento regressivo, dovrebbe rimanere vuota.

Continua a fare dei tentativi utilizzando le nozioni apprese in quelli precedenti e seguendo le strategie esposte.

Procedo in realtà, in una maniera un poco aleatoria e, chiaramente, a volte ottengo qualcosa, a volte retrocedo. Una delle volte lascio di nuovo 5 pedine isolate e mi arrabbio.

Frase T.13

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente segue il piano formulato e prova varie combinazioni di pedine per arrivare alla soluzione.]

A questo punto cerca di nuovo di procedere in modo sistematico e concentra l'attenzione nel riempire gli angoli del tavolo da gioco.

Torno a concentrare l'attenzione negli angoli e incontro uno schema.

Frase T.14

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Ottego di riempire i tre angoli e sono capace di riprodurlo.

Frase T.15

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver deciso di concentrare l'attenzione sulle posizioni angolari, prova a trovare delle configurazioni che lo portino all'obiettivo.]

A questo punto, dopo aver ottenuto di far arrivare una pedina in ogni angolo del tavolo da gioco, decide di formalizzarli risultato ottenuto per tenere una traccia di quello che ha fatto.

Decido di scrivere quello ho ottenuto e mi annoio abbastanza formalizzandolo.

Frase T.16

[Affermazione, modalità neutra]

E controlla immediatamente di averla scritta correttamente in modo da non sbagliare nei tentativi successivi.

Dopo essermi inventato una notazione e aver terminato di scriverla, devo verificare se l'ho scritta bene. Mi sbaglio, ma è facile sanare l'errore.

Frase T.17

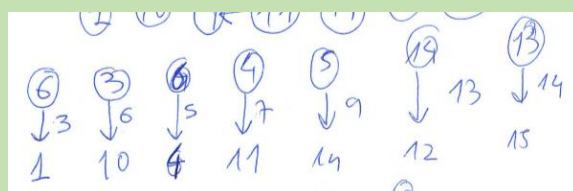


Figura 6.2.1

[Controllo, modalità discendente, lo studente, dopo aver pensato a una notazione e aver scritto i movimenti effettuati, verifica se sono corretti applicandoli al gioco.]

Nel colloquio affermerà che l'errore di cui parla era semplicemente una distrazione nel riportare la notazione. Possiamo notare, guardando la notazione, che quello che viene rappresentato da ogni terna di numeri sono i movimenti all'indietro del ragionamento regressivo. Per esempio la prima terna di numeri rappresenta il primo movimento: la pedina iniziale si trova nella posizione 6, questa viene spostata nella posizione 1 e viene aggiunta una pedina nella posizione 3. Notiamo inoltre che la posizione della pedina iniziale non è più nel centro del triangolo, come aveva affermato prima, ma è stata spostata nella posizione centrale di uno dei lati. Molto probabilmente questo spostamento è avvenuto tra i vari tentativi che lo studente ha fatto.

A questo punto ha un tavolo da gioco con alcune pedine, parte da questa configurazione, che sicuramente è una configurazione che porta alla soluzione giocando con le regole normali, e cerca di riempire il tavolo da gioco, per arrivare ad ottenere la configurazione di partenza, ovvero un unico foro vuoto. Si concentra nel risolvere questo nuovo *problema semplificato*: le pedine da inserire ancora sono solamente 6.

Bene, ora la mia base [di partenza] è il nuovo tavolo da gioco “mezzo completato” e rapidamente scopro un’altra questione utile: è interessante riempire le file dei bordi.

Frase T.18

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

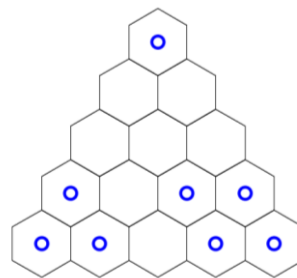


Figura 6.2.2

La figura 6.2.2 rappresenta la configurazione a cui si riferisce lo studente, il tavolo da gioco “mezzo completato”, l’abbiamo inserita, anche se non è presente nel protocollo di risoluzione perché il discorso risulti più chiaro.

A questo punto, volendo raggiungere la configurazione iniziale del gioco, ovvero il foro vuoto alla posizione 5 che è una delle posizioni centrali, si concentra sul riempire le posizioni che si trovano sui lati del triangolo.

In due movimenti chiudo un lato e la volta dopo che ci provo sono capace di risolvere il gioco del tutto.

Frase T.19

[Fase di esplorazione, modalità discendente, lo studente, dopo la formulazione del piano, lo applica al gioco.]

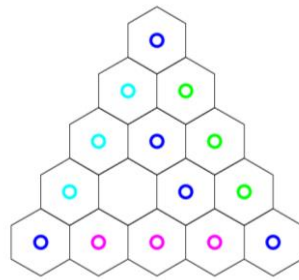


Figura 6.2.4

Anche qui abbiamo deciso di aggiungere la figura 6.2.4 per rendere più chiaro il discorso. Quello che lo studente attua è cercare di riempire prima di tutto le posizioni che nella figura sono in azzurro, successivamente quelle in verde e infine quelle in fuxia. La configurazione a cui arriva lo studente con questa strategia è quindi una configurazione in cui l'unico foro vuoto che rimane è nella posizione 8. Scrive quindi la soluzione.

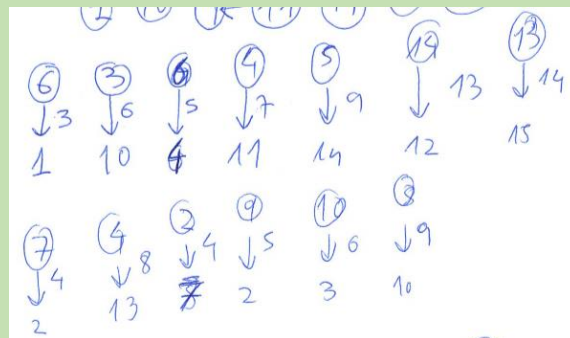


Figura 6.2.3

{In questa prima parte del protocollo la *componente teleologica* prevale sulla componente comunicativa e su quella epistemica. La *componente epistemica* appare quando lo studente controlla la notazione dei movimenti che ha eseguito e la corregge. La *componente comunicativa* rimane come filo conduttore sullo sfondo.}

Fase 3: Verificare i risultati

A questo punto lo studente si rende conto che il foro vuoto non è nella posizione desiderata.

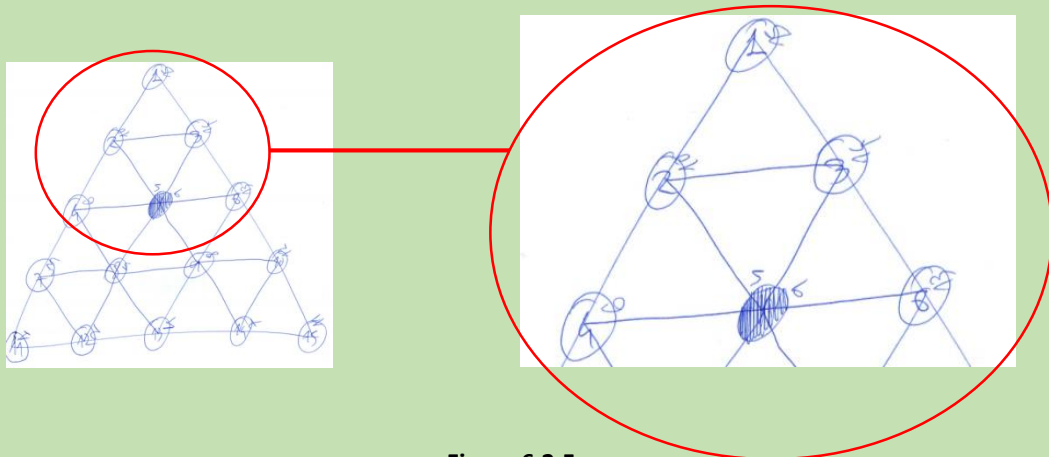
Mi rendo conto, comunque, che l'ho risolto "girato". La casella nera non sta dove dovrebbe, ma anche questo è facilmente risolvibile, perché se giriamo il tavolo da gioco abbiamo già [la soluzione].

Frase T.20

[Fase di controllo, modalità ascendente, lo studente, dopo aver risolto il gioco, controlla la soluzione ottenuta.]

Dovrei modificare i numeri, è facile rinominando le caselle.

Frase T.21



[Affermazione, modalità discendente, lo studente, dopo aver osservato il tavolo da gioco e essersi reso conto che è ruotato, ruota la notazione da lui ideata.]

Possiamo notare nell'ingrandimento della figura 6.2.5 che effettivamente sul tavolo da gioco utilizzato ogni casella è numerata due volte, la notazione inserita all'interno delle

posizioni è la prima notazione, mentre la notazione inserita ruotata è la seconda notazione, ovvero quella che è stata fatta successivamente alla rotazione del tavolo da gioco.

Lo studente riscrive la notazione corretta in modo che il foro finale libero rimanga nella posizione 5.

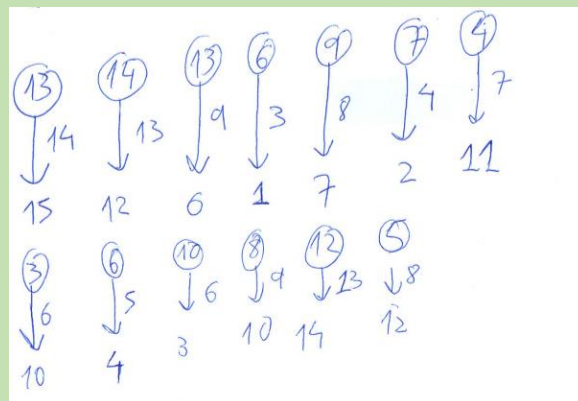


Figura 6.2.6

[Affermazione, modalità neutra]

Notiamo che lo studente non ha riscritto la notazione nell'ordine normale anche se sa perfettamente che la soluzione del gioco non è quella della figura 6.2.6 ma è esattamente il suo rovescio.

{In questa seconda parte di protocollo prevalgono la componente epistemica e comunicativa mentre la *teleologica* rimane sullo sfondo. Ormai giunto alla conclusione lo studente controlla la soluzione ottenuta (*componente epistemica*) e successivamente la formalizza con una notazione adeguata (*componente comunicativa*)}

Considerazioni sullo svolgimento del solitario

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate, evidenziando i punti di svolta nella risoluzione, per il conseguimento della soluzione; la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate	Punto di svolta
Fase 1: Fase di familiarizzazione		
Frase T.1	<i>Fare tentativi senza una strategia specifica</i>	
Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia		
Frase T.6	<i>Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco</i>	✓
Frase T.7	<i>Utilizzare il ragionamento regressivo</i>	
Frase T.10	<i>Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco</i> <i>Utilizzare il ragionamento regressivo</i>	✓
Frase T.16	Controllo	
Frase T.18	<i>Risolvere un problema più semplice</i>	✓
Frase T.19	Risultato (Tavolo da gioco ruotato)	
Fase 3: Verificare i risultati		
Frase T.20	<i>Approfittare della simmetria</i>	
Figura 2.6	Risultato	

Tabella 6.2.5 - Strategie di risoluzione del Solitario Triangolare

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase T.1	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase T.2	IC	Piano	Ascendente	
Frase T.3	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.4	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase T.5	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase T.6	IC	Esplorazione	Ascendente	Epistemica
Frase T.7	IC	Piano	Neutrale	Teleologica e Comunicativa
Frase T.8 e T.9	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.10	IC	Piano	Neutrale	
		Esplorazione	Discendente	
Frase T.11	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.12	IC	Piano	Neutrale	
Frase T.13	IC	Esplorazione	Discendente	Comunicativa
Frase T.14	IC	Piano	Neutrale	
Frase T.15	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.16	IC	Affermazione	Neutrale	
Frase T.17 e Figura 2.1	IC	Controllo	Discendente	
Frase T.18	IC	Piano	Neutrale	Teleologica e Comunicativa
Frase T.19 e Figura 2.3	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase T.20	IC	Controllo	Ascendente	Epistemica
Frase T.21 e Figura 2.5	IC	Affermazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Figura 2.6	IC	Affermazione	Neutrale	Comunicativa

Tabella 6.2.6 - Analisi metodologica del Solitario Triangolare

Anche in questo protocollo è presente solamente la componente di ricerca.

Osservando la tabella riassuntiva si nota chiaramente l'alternanza tra le fasi di esplorazione e la formulazione dei piani di risoluzione. Anche in questo caso, per quanto riguarda le modalità, possiamo vedere la successione tra quella discendente e quella ascendente. Per ciò che concerne le componenti della razionalità, quella comunicativa rimane sullo sfondo per tutto lo svolgimento passando in primo piano solamente nella fase di verifica dei risultati ottenuti. Si alternano invece quella teleologica, caratteristica della formulazione dei piani, e quella epistemica che connota le fasi in cui lo studente verifica il suo operato. Interessante è la frase T.17 (componente epistemica), successiva al momento in cui lo studente decide di scrivere i movimenti che lo hanno portato a costruire una configurazione vincente. Egli non si accontenta di esplicitare i passaggi, ma li verifica sul tavolo da gioco rilevando l'errore commesso.

L'uso del ragionamento regressivo nella risoluzione è fondamentale. Egli riesce ad applicarla in modo proficuo anche se l'idea non è sua, ma è un'informazione che arriva da un altro compagno. Possiamo notare come lo studente combini le nozioni che apprende durante la risoluzione, utilizzandole per raggiungere l'obiettivo. Infatti dopo aver notato che gli angoli del tavolo da gioco sono posizioni importanti non abbandona l'idea iniziale di svuotarli per primi. Utilizza il ragionamento regressivo e, trasformando l'idea iniziale, riempie gli estremi del tavolo da gioco per primi cercando, inizialmente, una configurazione vincente in cui ci siano tutti e tre gli angoli pieni. Dopo averla trovata, parte da quella posizione e, sempre facendo movimenti all'indietro, fa alcuni tentativi senza una strategia specifica fino a quando capisce che deve concentrarsi nel riempire i lati del tavolo da gioco uno alla volta. Applica quindi il ragionamento regressivo in modo consapevole, combinandolo con altre strategie.

6.2.4. Solitario della Bastiglia

Integreremo la prima parte del protocollo di risoluzione con la videoregistrazione fatta in classe.

Fase 1: Leggere le regole del gioco (fase di familiarizzazione)

Inizia con questa fase la Componente di ricerca (IC).

Inizialmente Martín prova a fare un tentativo di risoluzione utilizzando la pagina web proposta. Elena intanto comincia a costruire delle palline di carta per poter giocare utilizzando il tavolo da gioco stilizzato che è stato consegnato a ogni coppia stampato su carta.

La prima domanda che ci poniamo è se utilizzare il metodo diretto o di marcia indietro.

Frase P.1

[Domanda]

Proviamo il gioco con il computer, ma solo una volta.

Frase P.2

[Fase di esplorazione, modalità discendente, gli studenti, dopo aver letto le regole del gioco, inizia a provare a fare dei movimenti sulla pagina web.]

Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia

Dopo il primo tentativo in modo aleatorio i due studenti si concentrano sul ragionamento regressivo. Tutti i tentativi di risoluzione del gioco verranno effettuati seguendo questa strategia.

Preferiamo concentrarci nel muovere all'indietro.

Frase P.3

[Formulazione di un piano, modalità neutra]

Abbiamo fatto alcune pedine di carta per giocare.

Frase P.4

[Fase di esplorazione, modalità discendente, gli studenti, dopo aver deciso di provare con il ragionamento regressivo, cercano un modo per poter giocare al solitario facendo i movimenti al contrario.]

A questo punto i due studenti, seguendo la strategia del ragionamento regressivo, cominciano a fare dei movimenti usando le palline di carta e il tavolo da gioco stampato sul foglio. Tutto ciò fino a che Martín non inizia a ragionare sulle mosse da fare in modo che non siano aleatorie.

Linea 1 M: [...] Io il centro lo eviterei.

Linea 2 E: Dobbiamo andare a fare gli estremi.

Linea 3 M: Sì...

Linea 4 E: Qui si deve arrivare fino al centro {indica lo schermo del computer} e qui agli estremi {indica il foglio su cui stanno muovendo le palline di carta}.

Linea 5 M: Sì...

Linea 6 E: Io direi che gli angoli erano la chiave, no?

Linea 7 M: Sì, anche quello.

Video 22 - [MVI_0737] (minuti 2.58-3.15)

In questi pochi secondi gli studenti si rendono conto del fatto che, usando la strategia del ragionamento regressivo, devono cercare di riempire gli estremi il prima possibile per evitare di lasciarli isolati in seguito. Paragonano questo gioco con il Solitario Triangolare: quando Elena dice “Io direi che gli angoli erano la chiave, no?” si riferisce proprio a questo. Applicano a questo gioco le nozioni apprese risolvendo il precedente solitario.

Riportano l’idea nel protocollo.

Ci rendiamo conto che è importante riempire prima di tutto gli estremi.

Frase P.5

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, gli studenti, dopo un’esplorazione iniziale, capiscono il valore delle posizioni agli estremi del tavolo da gioco e formulano un piano per raggiungerle con le pedine.]

I due studenti stanno usando il ragionamento regressivo, ricordiamo che un movimento eseguito con questa strategia significa togliere una pedina e riempire le due caselle adiacenti a quella della pedina eliminata. A questo punto Martín inizia ad osservare il tavolo da gioco e a rendersi conto che, usando questa strategia, una pedina nel quadrato centrale, se considerata come pedina iniziale del movimento, può riempire una o due caselle nei bracci della croce a seconda della sua posizione. In seguito i due studenti capiscono che possono arrivare a riempire una delle tre posizioni che stanno nell’estremo del braccio della croce se la pedina considerata è in una delle caselle del perimetro del quadrato centrale.

Linea 1 M: Mi sto rendendo conto di una cosa, che bisogna cercare di mettere pedine in questo quadrato di mezzo, {indica le nove caselle centrali del tavolo da gioco} perché ogni volta che metto

una pedina nel quadrato di mezzo ne sposta due fuori, quindi sarà molto importante.

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, dopo una prima esplorazione, Martín, arriva a formulare un primo piano sui movimenti da fare per riuscire ad arrivare agli estremi]

E dopo un momento di silenzio cerca di spiegare meglio la sua idea a Elena. Inizia a riempire il quadrato indicato in precedenza. La configurazione sul tavolo da gioco in questo momento è come nella figura 6.2.7.

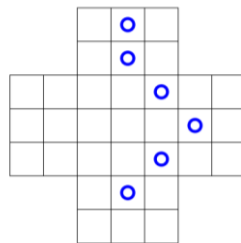


Figura 6.2.7

Linea 2 M: Guarda per esempio se muoviamo questa li... {sposta la pedina nella posizione 11 alla posizione 9} abbiamo ottenuto di avere questa {mette una nuova pedina nella posizione 10} ... no? [...] e adesso... possiamo fare lo stesso verso di la {indica verso il braccio inferiore del tavolo da gioco} anche se togliamo un'altra [pedina] da questo quadrato e possiamo muoverla verso di la {sposta la pedina nella posizione 11 nella posizione 24} e metterne una nel mezzo {mette una nuova pedina nella posizione 17}.

Con questi movimenti Martín arriva alla configurazione della figura 6.2.8.

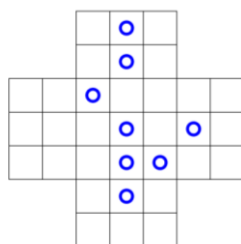


Figura 6.2.8

[...]

Linea 3 E: Dobbiamo sempre cercare di avere due spazi... per esempio per riempire qui {indica le posizioni 7 e 8} abbiamo bisogno di averne due libere [caselle]... lo stesso che per arrivare a qualunque di queste {indica il braccio sinistro del tavolo da gioco}, quindi bisogna partire da una pedina che sta qui {indica le posizioni 9, 16 e 23} e lo stesso simmetricamente.

Linea 4 M: Certo quindi... mi sto rendendo conto di un'altra cosa...

Linea 5 E: Bisogna riempire queste {indica le caselle del perimetro del quadrato} per riempire quelle lontane {indica le caselle del braccio sinistro della croce}.

[Fase di controllo, modalità discendente, gli studenti osservano il tavolo da gioco cercando di valutare il piano formulato da Martín.]

Linea 6 M: Si però inoltre per ognuna [casella] che fa parte degli angoli di questo quadrato {indica le posizioni 9, 11, 23, 25}, bisogna passare attraverso di lei due volte, diciamo, {ora si riferisce alla posizione 9, sta facendo un esempio per spiegare a Elena cosa sta cercando di dire} una per riempire questo {indica le posizioni 8 e 7} e una per riempire questo {indica le posizioni 4 e 1}, quindi vediamo cosa succede se lo risolviamo.

Video 23 – [MVI_0737] (minuti 3.22-5.02)

[Formulazione di un piano, modalità ascendente, Martín, dopo aver osservato il tavolo da gioco insieme ad Elena, migliora il piano formulato in precedenza.]

I due studenti stanno cercando un modo per arrivare a riempire le caselle agli estremi. Risulta da questo dialogo che cercano di muoversi a raggiera, partendo dal centro e andando verso l'esterno. Analizzano il tavolo da gioco e i possibili movimenti che le pedine possono fare all'interno di questo, per poter poi usare efficacemente la strategia del ragionamento regressivo e raggiungere l'obiettivo. Osservano che, muovendosi dal centro verso l'esterno, per riuscire a riempire una delle caselle agli estremi della croce, devono avere una pedina sul bordo del quadrato centrale. Martín inoltre rileva che attraverso le caselle negli angoli del quadrato "passano" due pedine. Ogni casella nell'angolo del quadrato ha due caselle adiacenti facenti parte di un braccio della croce e altre due facenti parte di un altro braccio. Con questo "passare" Martín vuole dire che, con una pedina in una casella nell'angolo del quadrato, si possono riempire le due caselle adiacenti che stanno su un braccio della croce, bisognerà riuscire a posizionare un'altra pedina in quella posizione per riuscire a riempire le altre due caselle adiacenti, che fanno parte dell'altro braccio.

Ritroviamo questo episodio nel protocollo di risoluzione.

Per questo dobbiamo mettere le pedine nelle caselle del perimetro del quadrato centrale.

Frase P.6

[Formulazione di un piano, modalità neutrale]

{In questa prima parte del protocollo di risoluzione possiamo notare come prevalga la *componente teleologica* mentre quella comunicativa fa da sfondo. Per quanto riguarda il video 23 invece la situazione cambia. Nella prima linea del video Martín formula un piano di risoluzione (*componente teleologica*). Nella seconda linea, mentre cerca di spiegarlo a Elena (*componente comunicativa*) controlla, con un esempio, se quello che ha pensato effettivamente può funzionare (*componente epistemica*). Nelle successive

tre linee la componente epistemica e quella comunicativa rimangono in primo piano mentre sullo sfondo troviamo la teleologica. Infine nella sesta linea la componente *teleologica* è di nuovo presente in primo piano.}

A questo punto i due ragazzi dopo aver fatto un paio di movimenti [Fase di *esplorazione, modalità discendente*] ricominciano a riflettere e cercano di capire quante pedine devono posizionare e dove, affinché riescano a raggiungere le posizioni più esterne.

Con questa strategia quante pedine passeranno per le caselle del quadrato centrale?

Frase P.7

[Domanda]

Linea 1 E: Dal centro si deve passare 4 volte per riempire questa {indica la casella 15}, questa, questa e questa {e le altre tre simmetriche}. Quindi se abbiamo questo disegno, questo è il quadrato principale {disegna un quadrato composto da 9 caselle e ragiona guardando questo}, siamo arrivati al fatto che da qui dobbiamo passare 4 volte {scrive "4" nella casella centrale del quadrato}, da qui due {scrive "2" in ogni angolo del quadrato} e da tutte queste anche due {scrive "2" nelle quattro caselle che rimangono}.

Linea 2 M: Non sono d'accordo, io credo che sia così: {disegna un altro quadrato come Elena} credo che sia due, due, due, due, {scrive "2" in ogni angolo} uno, uno, uno, uno {scrive "1" nelle altre caselle lasciando vuoto il centro} e quella del centro non saprei dirtelo... ma perché credo che non sia 4?

Linea 3 E: Sì è uno, è uno, è vero è uno, è questo... e non è 4?

Linea 4 M: Perché credo che non sia 4? Perché se nel centro... aspetta lo faccio in questo tavolo da gioco... Il centro non credo che serva a molto perché, se io ne ho una qui {posiziona una pedina nel centro} la vado a spostare qui {sposta la pedina nella posizione 19 come se stesse iniziando a fare il movimento} e questa del fondo {indica la posizione 20} ce l'avrei vuota e già non potrei spostare nessun'altra [pedina per riempirla]... perché dato che l'ho bloccata ad averne due qua... {posiziona un'altra pedina nella posizione 18 completando il movimento} se ne avessi solo una sì... {toglie la pedina dalla posizione 19} Quindi quella centrale credo che bisogna cercare di mantenerla sempre libera.

Video 24 – [MVI_0738] (minuti 0.14-1.26)

2	1	2
1		1
2	1	2

Figura 6.2.6

[Fase di *esplorazione*, *modalità discendente*, i due studenti cercano di capire quante pedine dovranno riuscire a posizionare nelle caselle del quadrato centrale per riuscire a riempire i bracci della croce.]

Gli studenti in questi pochi secondi ragionano sulla posizione che devono avere le pedine per riuscire a raggiungere le posizioni più estreme. Martín nota subito che non bisogna lasciare una pedina nella posizione 19 (o in una delle simmetriche) per non bloccare la posizione 20 (o una delle simmetriche) non riuscendo in seguito a riempirla.

{In questo video possiamo notare che, mentre nella prima linea sono presenti la *componente teleologica* e quella *comunicativa*, nelle successive la comunicativa rimane sempre in primo piano mentre passa in secondo piano quella teleologica per

lasciare il posto *all'epistemica*. Infatti dopo che nella prima linea Elena espone la sua idea sul ruolo della caselle del quadrato centrale, nelle successive, Martín la corregge e cerca di spiegarle il perché di questa correzione.}

Continuano il discorso ora concentrandosi sulla posizione centrale.

Linea 1 M: Forse... dovremmo provare a togliere la pedina dal centro, sempre che ce l'abbiamo, perché non sia di ostacolo diciamo.

Linea 2 E: [...] Se qui abbiamo le altre due... {disegna accanto al quadrato le due file di pedine che costituiscono il braccio destro della croce} Sempre che si siano riempite queste tre {indica le tre posizioni nell'estremo del braccio} puoi avere una pedina nel centro, per cosa? Per riempire la seguente [fila di caselle] {indica le caselle delle posizioni 12, 19, 26}.

Linea 3 M: Può essere, io la vedo come... Vediamo se mi spiego: Questi {indica il quadrato centrale con i numeri dei movimenti, figura 6.2.6} sono dei movimenti abbastanza diretti, perché ogni volta che ne hai una [pedina in una casella] ne riempi due [caselle]... {si sposta sul tavolo da gioco e segue il movimento aiutandosi con la penna, passando dalla 10 (che immagina con una pedina) alle due caselle adiacenti: la 4 e la 2} ma questo {indica la casella centrale} è molto di transizione, è come pensare a una giocata intermedia.

Linea 4 E: Andrebbe bene perché la questione è che questa {indica la casella centrale} è vuota fino a che non riempiamo gli angoli e dopo lo costruiamo.

[Fase di *esplorazione*, *modalità discendente*, i due studenti cercano di capire il ruolo della pedina centrale.]

Linea 5 M: Quello che volevo dirti è che per le analisi di questa giocata diretta ci serve questo quadro {indica il quadrato della figura 6.2.6} ma quella del centro credo non ci dia informazioni per questa giocata diretta, io farei un altro quadrato se troviamo un motivo per il quale debbano apparire nel centro... e credo che con quello che abbiamo appreso in questo momento io svuoterei il tavolo da gioco e ricomincerei... ti sembra possa andare?

Video 25 – [MVI_0738] (minuti 1.43-3.09)

[Formulazione di un *piano, modalità ascendente*, dopo aver osservato il tavolo da gioco e discusso sul ruolo delle caselle del quadrato centrale, decidono di provare a giocare seguendo le indicazioni che riassumono nella figura 6.2.6. Il piano è: cercare di far arrivare due pedine nelle posizioni angolari e una pedina nelle posizioni a metà del lato del quadrato, per poter riempire gli estremi della croce.]

La posizione centrale, già lo vediamo nella trascrizione del video 24, è oggetto di discussione tra i due ragazzi. Hanno le idee abbastanza chiare sul ruolo delle pedine che fanno parte del perimetro del quadrato centrale ma hanno ancora dei dubbi per quanto riguarda la casella centrale. Cercano in questi pochi minuti di districarli. Elena è convinta che possa essere utile per riempire la prima fila di caselle che costituiscono il braccio della croce, mentre Martín non è sicuro di questo, pensa invece che il movimento a partire dalla casella centrale sia un movimento intermedio e che serve, forse, per poter arrivare a quella che lui chiama una “giocata diretta” ovvero il movimento dal perimetro del quadrato agli estremi della croce. Notiamo come ancora qui la loro idea è di fare movimenti dal centro verso l’esterno, in una visione del gioco a raggiera.

Da qui in poi continueremo con l’analisi utilizzando solamente il protocollo di risoluzione.

Dopo un primo tentativo muovendo all'indietro "alla cieca", senza nessuna strategia a priori, affrontiamo un secondo tentativo nel quale abbiamo già delle idee per applicare ciò che è stato appreso.

Frase P.8

[Fase di esplorazione, modalità discendente, gli studenti, dopo aver deciso di utilizzare il ragionamento regressivo e aver fatto delle osservazioni sui movimenti utili per arrivare a riempire gli estremi, provano ad applicarlo al gioco.]

Gli studenti continuano a fare delle osservazioni sulle posizioni delle pedine, si rendono conto in particolare, che dopo aver fatto un movimento dal bordo del quadrato verso l'esterno, e aver quindi così riempito una delle caselle negli estremi della croce, la pedina intermedia, ovvero quella che è situata nella casella tra il bordo del quadrato e la casella all'estremo, si può muovere verso il centro per fare così dei passi intermedi.

Ci siamo resi conto del fatto che le caselle centrali "dei bracci" le posso riportare al centro. Mi servono per realizzare dei passi intermedi.

Frase P.9

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, dopo alcune analisi gli studenti fanno delle osservazioni sulle posizioni del tavolo da gioco che possono aiutarli o meno nella risoluzione.]

A questo punto gli studenti si rendono conto che i movimenti a raggiera, dal centro verso l'esterno, devono essere combinati con dei movimenti in altre direzioni affinché si riesca a fare più movimenti e si giunga quindi alla soluzione.

Ci rendiamo anche conto del fatto che dobbiamo combinare dei movimenti in varie direzioni, perché altrimenti completeremo solamente delle linee e l'algoritmo finirà troppo presto.

Frase P.10

[Fase di esplorazione, modalità ascendente, gli studenti, dopo alcune analisi, fanno delle osservazioni sulle posizioni del tavolo da gioco che possono aiutarli o meno nella risoluzione.]

Gli studenti, nel poco tempo a disposizione, non riescono a risolvere il solitario.

Non abbiamo ottenuto la risoluzione totale.

Frase P.11

[Affermazione, modalità]

{In quest'ultima parte del protocollo è predominante la *componente teleologica*. Mentre la componente *comunicativa* rimane sullo sfondo per tutto il protocollo, nelle trascrizioni dei video la troviamo in primo piano, in particolare per quanto riguarda le parti di dialogo di Martín, in cui cerca sempre di spiegare alla compagna il suo punto di vista, rendendola partecipe dei suoi ragionamenti. Nella frase P.10 invece è in primo piano la componente *epistemica*, infatti gli studenti si rendono conto che cercare di riempire le caselle con movimenti a raggiera non è una strategia efficace.}

Approfondimenti: La strategia del ragionamento regressivo

Alla fine della lezione, sono state presentate le strategie possibili di risoluzione e una possibile soluzione al solitario. La soluzione proposta è quella ideata da Miguel de Guzmán che è riportata nel capitolo 3 di questo lavoro. Dopo di che è stato chiesto agli studenti di raccontare ai compagni le strategie da loro utilizzate. Martín è stato uno degli studenti che si è offerto volontario per parlare. Anche questa spiegazione è stata videoregistrata.

Dopo aver disegnato alla lavagna il tavolo da gioco del solitario triangolare, inizia a spiegare i primi passi del lavoro svolto.

Linea 1 M: Una delle prime cose di cui ci siamo resi conto è che queste caselle {indica le caselle del quadrato centrale}, le nove caselle del quadrato centrale, sono abbastanza importanti. [...] Per esempio, se abbiamo qui una pedina {disegna una "X" nella posizione 9}, questa pedina ci può servire per mettere due pedine qui {cancella la "X" e ne disegna altre due, una della casella 4 e l'altra nella casella 1}. Quindi siamo arrivati alla conclusione che una pedina [...] dovrebbe passare da qui due volte {indica la posizione 9} per mettere delle pedine di questo modo {indica le caselle 4 e 1} e una volta se le mettiamo in questo modo {indica prima la casella nella posizione 10 e successivamente le posizioni 5 e 2}. Un'altra delle cose di cui ci siamo resi conto è che se vogliamo farlo così [cioè mettendo delle pedine sui bordi del quadrato per spostarle poi verso gli estremi della croce] {indica le caselle dei bordi del quadrato centrale}... Abbiamo scoperto che, per esempio, la prima pedina che abbiamo [all'inizio, sul tavolo da gioco] {disegna una "X" nella posizione

centrale}, che necessariamente va dal centro a qui { cancella la "X" e ne disegna altre due, una nella casella 24 e l'altra nella casella 29} o in qualunque altro lato in modo simmetrico.. Cioè in qua {indica il braccio destro della croce}, verso l'alto o in qua {indica il braccio sinistro della croce} ... Questa pedina {indica la "X" nella posizione 29} si può rimettere nel centro... ora non mi ricordo bene cosa abbiamo fatto ma questo è il modo con il quale abbiamo iniziato.

Video 26 – [MVI_0738] (minuti 0.27-1.45)

A questo punto uno studente gli chiede se questo è quello che è stato spiegato in precedenza, se è la strategia del ragionamento regressivo.

Linea 1 S: Questo sarebbe quello che è stato spiegato del ragionamento regressivo, no?

Linea 2 M: Certo, tutto questo, mi sono dimenticato di dirlo, consiste nel fatto che al posto che iniziare dal principio, supponiamo qual è [la pedina finale] {indica la posizione centrale} ... Questa {indica le due "X" disegnate nella posizione 24 e nella posizione 29} sarebbe l'ultima giocata che dobbiamo fare nel gioco. [La strategia del ragionamento regressivo] consiste nel fatto che nel gioco cerchiamo questa situazione. Al posto di cercare semplicemente la fine, dobbiamo cercare qual è il cammino per arrivare alla fine.

Video 27 – [MVI_0738] (minuti 0.27-1.45)

È in primo piano, in questi minuti di video, la componente comunicativa, mentre troviamo sullo sfondo le altre due. Lo studente sa chiaramente che la strategia che sta usando è quella del ragionamento regressivo e prova a spiegarla ai suoi compagni.

Spiega inoltre come in questo gioco, sapendo qual è la pedina finale, si possa facilmente applicare questa strategia. Il processo quindi consiste nel trovare, partendo dall'ultima pedina, delle configurazioni vincenti che portino, svolte nella giusta direzione, alla soluzione finale.

Considerazioni sullo svolgimento del solitario

Per riassumere l'analisi di questo protocollo di risoluzione proponiamo due tabelle: la prima in cui si riassumono le parti del protocollo con le diverse strategie utilizzate, evidenziando i punti di svolta nella risoluzione, per il conseguimento della soluzione; la seconda in cui si riassumono le due metodologie di analisi utilizzate: la FLIM e il modello di Habermas.

Parti del protocollo	Strategie utilizzate
Fase 1: Fase di familiarizzazione	
Frase P.2	<i>Fare tentativi senza una strategia specifica</i>
Fase 2: Esplorare e eseguire la strategia	
Frase P.3	<i>Utilizzare il ragionamento regressivo</i>
Esplorazione con palline di carta	<i>Approfittare della simmetria</i>
Frase P.11	<i>Riconoscere il ruolo delle pedine nel tavolo da gioco</i>

Tabella 6.2.7 - Strategie di risoluzione del Solitario della Bastiglia

Parti del protocollo	Finer Logic of Inquiry Model			Modello della razionalità di Habermas
	IC/DC	Azione	Modalità	Componenti
Frase P.1	IC	Domanda		
Frase P.2	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase P.3	IC	Piano	Neutrale	Teleologica e
Frase P.4	IC	Esplorazione	Discendente	Comunicativa
Frase P.5	IC	Esplorazione	Ascendente	
Video 23 (L1)	IC	Piano	Ascendente	
Video 23 (Linee 2-5)	IC	Controllo	Discendente	Epistemica e Comunicativa
Video 23 (L6)	IC	Piano	Ascendente	
Frase P.6	IC	Piano	Neutrale	
Momento di gioco	IC	Esplorazione	Discendente	Teleologica e Comunicativa
Frase P.7	IC	Domanda		
Video 24 (L1) e Figura 2.6	IC	Esplorazione	Discendente	
Video 24 (Linee 2 - 3)				Epistemica e Comunicativa
Video 25 (Linee 1-4)	IC	Esplorazione	Discendente	
Video 25 (L5)	IC	Piano	Ascendente	Teleologica e Comunicativa
Frase P.8	IC	Esplorazione	Discendente	
Frase P.9	IC	Esplorazione	Ascendente	
Frase P.10	IC	Esplorazione	Ascendente	Epistemica e Comunicativa
Frase P.11	IC	Affermazione	Neutrale	

Tabella 6.2.8 - Analisi metodologica del Solitario della Bastiglia

In questo protocollo di risoluzione possiamo osservare molto bene le prime fasi dell'uso della strategia del ragionamento regressivo. Gli studenti, dopo aver deciso di iniziare dalla fine, per prima cosa fanno dei movimenti aleatori per esplorare la situazione. Durante questa prima esplorazione osservano attentamente il tavolo da gioco e cominciano a condividere le loro idee sulla possibile tattica per riempire completamente il tavolo da gioco. Il primo piano formulato è quello di una risoluzione a raggiera; capiscono che per riuscire a riempire le caselle agli estremi hanno bisogno di una pedina sul bordo del quadrato, dopo averla posta possono fare un movimento verso l'esterno riempiendo due delle caselle del braccio della croce. Quando si rendono conto che questa tecnica non è efficace cambiano e provano a fare dei movimenti più rotatori. Questo passaggio è caratterizzato dalla componente epistemica.

Osservando dettagliatamente la prima parte della risoluzione, ci siamo resi conto che i due studenti collaborano alla formulazione dei piani di risoluzione (componente teleologica). Quando uno dei due esprime un'idea e la spiega al compagno, immediatamente verificano, con dei ragionamenti se questa è buona o meno. I dialoghi trascritti, infatti, sono caratterizzati da una parte in cui la componente teleologica è in primo piano e da un'altra in cui lo è quella epistemica. Dall'osservazione di questi possiamo anche notare come Martín esponga un'idea e immediatamente la spieghi alla compagna in modo da renderla partecipe del ragionamento.

Diverse abilità vengono trasferiti da un solitario all'altro, in particolare l'idea di usare la strategia del ragionamento regressivo e quella di riempire per primi gli angoli del tavolo da gioco. Durante la prima fase, soprattutto quando si rendono conto della simmetria del gioco, si riferiscono al solitario triangolare facendo dei paragoni. La somiglianza dei possibili movimenti delle pedine nei due giochi incentiva questo transfert.

Anche se per mancanza di tempo non arrivano alla soluzione pensiamo, dopo aver analizzato il protocollo, che se avessero potuto averne di più a disposizione sarebbero probabilmente arrivati a terminare il gioco.

6.3. CONCLUSIONI ALLO STUDIO DI CASO

Con l'analisi approfondita dei protocolli di risoluzione abbiamo potuto tracciare per ogni studente un profilo. Cerchiamo di identificare nei vari protocolli gli aspetti salienti rispetto al metodo e ai processi di risoluzione e le ricorrenze delle diverse componenti razionali. Il profilo che tratteremo ovviamente non sarà né assoluto né definitivo. Per ognuno dei due casi abbiamo notato alcune caratteristiche comuni e altre diverse che elencheremo in seguito.

La stesura del protocollo

Miriam: Preferisce elaborare il protocollo dettagliatamente passo dopo passo, anche se la risoluzione non è continua. Per esempio afferma nel colloquio che la risoluzione del Problema dei Fagioli l'ha svolta per fasi, ovvero ha cominciato a svolgere il problema e quando è arrivata a una situazione di stallo in cui non aveva bene idea di come continuare, è passata alla risoluzione del Problema dei Cammini per poi completarla in un secondo momento. È perfezionista, lei stessa lo afferma in una delle risposte del questionario 3. I suoi protocolli sono ordinati: ogni passaggio della risoluzione è separato rispetto agli altri. Le immagini che usa spesso sono accompagnate da commenti o osservazioni sulle stesse, questi sono posti accanto alla parte di immagine interessata dal commento, non li sovrappone alle immagini ed allo stesso tempo è molto chiaro a cosa si riferiscono. Per esempio nell'immagine 6.3.1 lo possiamo notare, abbiamo indicato il commento e la parte dell'immagine a cui si riferisce.

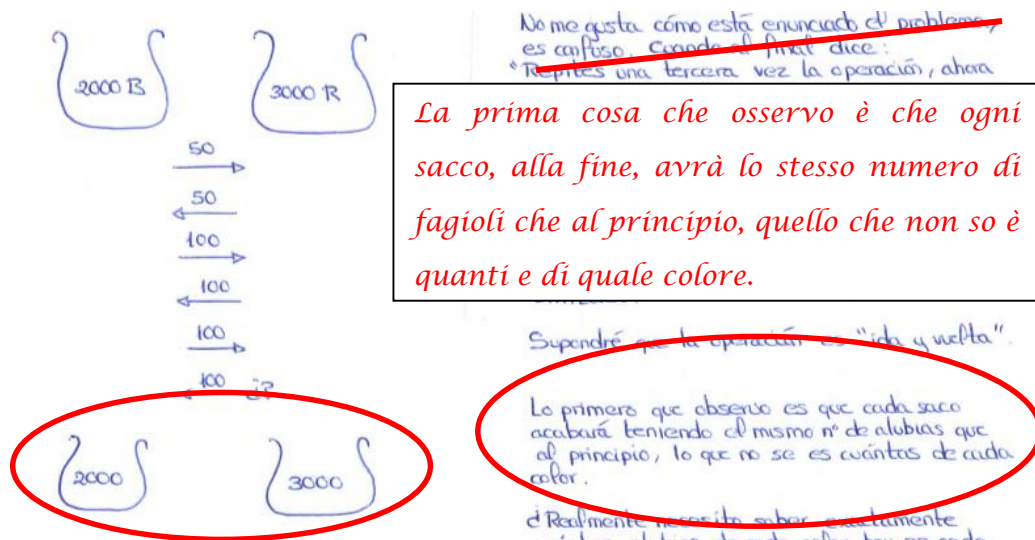


Figura 6.1.3

Martin: Preferisce concentrarsi sulla risoluzione per poi redigere solamente in seguito il protocollo di risoluzione. Per questo motivo esso risulta composto solamente da frasi concise ma molto chiare.

Intuizione iniziale

Entrambi: Dopo aver letto il testo del problema sono in grado di iniziare la risoluzione senza difficoltà. Immediatamente provano ad applicare le prime idee che vengono loro in mente, durante lo sviluppo di questa prima idea, se si rendono conto che non porta a nessun risultato sono in grado di modificarla in modo proficuo senza demoralizzarsi, sono molto tenaci.

L'uso delle immagini

Miriam: La quantità di immagini nei protocolli di risoluzione della studentessa è notevole. L'uso delle immagini è fondamentale nella componente di ricerca per giungere alla soluzione. Anche la comunicazione delle idee e dei procedimenti viene effettuata attraverso di esse. Non le usa solamente per rappresentare la situazione problema, hanno un ruolo fondamentale nelle fasi del ragionamento. Se non disegna il problema o parti del problema, utilizza comunque grafici o tabelle per schematizzare i passi della

risoluzione. È interessante notare che nel Solitario della Bastiglia dove le era stato fornito un supporto grafico (il computer con la possibilità di accedere al gioco), invece, quasi scompaiono dal protocollo.

Martin: A differenza di Miriam lo studente, nelle stesure dei protocolli, non fa praticamente uso di immagini, né nella risoluzione dei problemi né in quella dei giochi. Una delle poche immagini che disegna è quella che riporta nel protocollo del Solitario della Bastiglia (Figura 6.2.6). Anche in questo caso possiamo notare che in realtà è la sua compagna che disegna il quadrato, mentre lui si limita a correggerlo secondo le osservazioni che ha fatto. A conferma di questo, nel questionario 3 afferma che non è solito “abusare di immagini”.

Esercitano un controllo continuo sul proprio operato

Entrambi: L’aspetto epistemico della loro razionalità si manifesta a ogni passaggio del ragionamento. Valutano consciamente passo per passo la risoluzione, soffermandosi a riflettere sulla validità delle loro affermazioni e dei loro passaggi risolutivi prima di proseguire nel processo. In questo modo, prima di continuare con una strategia che non sono sicuri che porti verso la soluzione, provano a modificarla leggermente o addirittura la cambiano del tutto. Questo controllo è più evidente nei protocolli di Miriam che sono più dettagliati, ma non manca in quelli di Martín.

Esempio interessante a questo proposito è il protocollo relativo alla risoluzione del Problema dei Fagioli di Martín. È l’unico protocollo in cui lo studente si intestardisce a seguire l’intuizione che ha avuto leggendo il testo del problema, nonostante la risoluzione dia un risultato diverso. Solo dopo svariati tentativi cercherà di controllare il suo operato e di provare a passare a una strategia differente.

Uso consapevole delle strategie

Entrambi: A partire dalla prima strategia che utilizzano nella risoluzione del problema sono consapevoli di quello che sta facendo, degli strumenti che stanno utilizzando. Questa consapevolezza permette loro di rendersi conto se l'uso di una specifica strategia può avvicinare alla soluzione oppure no. Sono in grado di decidere, nel caso la tecnica non funzioni, se modificarla leggermente o se lasciarla da parte per provarne una diversa. In diverse occasioni combinano insieme differenti strategie.

Un esempio interessante è nel protocollo relativo al Problema dei Fagioli di Miriam, la studentessa, dopo aver ridotto le dimensioni del problema (Figura 6.1.2) decide di contare il numero di fagioli servendosi di una tabella (Figura 6.1.3).

Quando spiegano, durante il colloquio, le strategie usate riescono a distinguere quelle fondamentali, che li hanno portati alla soluzione da quelle di transizione, ovvero quelle che hanno permesso di fare dei passi avanti ma che, probabilmente, se avessero continuato a seguire le non li avrebbero permesso di giungere alla conclusione.

Transfert di abilità

Entrambi: Riescono a fare uso di nozioni e abilità, durante la risoluzione, che provengono da campi diversi. Per esempio nella risoluzione dei due problemi fanno uso delle nozioni apprese in altre materie del piano di studi in matematica ma anche di abilità apprese in altri momenti della loro carriera universitaria. Fanno uso in particolare delle nozioni di probabilità, e di algebra. Entrambi cercano di risolvere inizialmente il Problema dei Fagioli utilizzando la probabilità, successivamente passano all'uso di equazioni. Nel Problema dei Cammini invece, entrambi cercano una formula generale per esprimere il valore finale in relazione con l'ordine del triangolo considerato, ma mentre Miriam usa il calcolo combinatorio e una sommatoria, Martin arriva a una formula generale per induzione.

Riescono a trasferire le abilità apprese nella risoluzione del Solitario Triangolare alla risoluzione del Solitario della Bastiglia, essendo due giochi molto simili. L'uno per quanto riguarda l'uso del ragionamento regressivo e il ruolo fondamentale delle caselle ad angolo, l'altra per quanto riguarda la scomposizione del tavolo da gioco in insiemi di pedine più piccoli.

Difficoltà nel problema dei Fagioli

Miriam: Parlando con la studentessa, nel colloquio, del perché afferma che ha "difficoltà con l'uso della probabilità" abbiamo potuto notare che queste non sono relative alla complessità della materia in se (nozioni, formule, ...). Quello che abbiamo percepito è che la difficoltà della studentessa sta nel passaggio che deve fare, durante la risoluzione di un problema, tra l'interpretazione del testo e la sua rappresentazione. Se nella presentazione del problema non esiste già una rappresentazione o comunque i valori utilizzati non sono accessibili, la rappresentazione diventa un problema. Probabilmente la studentessa afferma di avere delle difficoltà con l'uso della probabilità perché negli esercizi tipici della materia questo passaggio di rappresentazione è molto comune.

Martín: Il fatto che fosse così legato alla sua intuizione ha fatto sì che diffidasse del risultato ottenuto nella risoluzione del problema e continuasse a provare a risolverlo utilizzando la stessa strategia che continuava a dargli lo stesso risultato. Il motivo per cui diffidava del risultato, molto probabilmente era il fatto che utilizzare le nozioni di probabilità lo stava portando a calcoli con frazioni il cui denominatore diventava sempre più complicato. Anche in questo caso, come in quello di Miriam, sembra esserci una difficoltà nella rappresentazione del problema. Nonostante lui sia riuscito a rappresentarlo, quella che ha usato non è una rappresentazione efficiente.

È possibile che queste difficoltà siano dovute al fatto che nella carriera universitaria gli studenti siano abituati a risolvere problemi seguendo uno schema prestabilito. In

particolare sono abituati a vedere dei problemi di probabilità con un testo basato su urne, sacchi, contenitori di palline o altri oggetti colorati. L'analogia con questi problemi fa sì che gli studenti cerchino, prima di tutto, di risolvere il problema nel modo in cui sono abituati.

Uso del ragionamento regressivo

Miriam: Utilizza il ragionamento regressivo nel Problema dei Fagioli e nel Solitario Triangolare. Nel primo fa uso della strategia inconsciamente mentre nel secondo no, è consapevole del suo uso. Ha delle difficoltà a capire quando lo sta usando e quando no. Non sempre infatti si rende conto di usare questa strategia. Possiamo notare come in entrambi i casi la strategia è stata utilizzata in contemporanea ad altre strategie: nel problema con l'uso di un linguaggio algebrico mentre nel solitario con la scomposizione del tavolo da gioco e tenendo in conto che gli angoli del tavolo da gioco sono delle posizioni fondamentali. Il ragionamento regressivo nel Problema ha avuto lo scopo di dimostrare la soluzione già ottenuta con altre strategie, dopo aver ottenuto la possibile soluzione infatti lo applica per verificare la sua validità. Nella risoluzione del solitario lo utilizza consapevolmente per raggiungere una soluzione che verificherà successivamente facendo i movimenti sul tavolo da gioco secondo le regole normali.

Martín: Utilizza il ragionamento regressivo nella risoluzione dei due solitari. Nel Triangolare fa uso della strategia dopo che un suo compagno ha proposto l'idea, in quello della Bastiglia invece l'idea della strategia arriva dalla risoluzione del primo. Il transfert di abilità è chiaro. In entrambi i solitari lo scopo di questa strategia era quello di raggiungere la soluzione. Per farlo combina questa strategia con l'idea di riempire prima di tutto gli estremi del tavolo da gioco.

Nel colloquio individuale, oltre ad aver chiarito e approfondito il lavoro svolto nella stesura dei protocolli, è stato chiesto agli studenti, favorevoli all'uso dei giochi nella

didattica, di esprimere una loro opinione sull'uso dei giochi per lo sviluppo della strategia del ragionamento regressivo. Entrambi pensano che sia una buona idea, la studentessa in particolare risponde molto positivamente, e descrive come anche fuori dall'ambito scolastico, abbia osservato che nella risoluzione dei giochi viene sviluppata la strategia del ragionamento regressivo, queste le sue parole.

Quello dei giochi [l'uso] non l'avevo mai pensato però è una buona idea perché molte volte tu proponi un gioco e [quelli a cui lo proponi] vedono chiaramente la soluzione ma non vedono come arrivare a questa... E quindi, avendo la soluzione, iniziano ad andare al contrario... Io per esempio l'ho visto in modo chiaro con l'esempio del labirinto. Io ad amici o a mio cugino piccolo propongo dei labirinti e loro iniziano [a risolverli] dall'uscita al posto che dall'entrata e arrivano più facilmente [alla soluzione], quindi sì, credo che i giochi ti aiutino a sviluppare questa capacità più che altre aree della matematica.

Video 21 - [MVI_0806] (minuti 0.23-0.56)

Riassumiamo i due profili in una tabella.

Miriam	Martín
Protocollo chiaro e dettagliato	Protocollo chiaro e conciso
Usa le immagini	Non usa le immagini
Sa come iniziare un problema	Sa come iniziare un problema
Esercita un controllo sul proprio operato	Esercita un controllo sul proprio operato
Utilizza consapevolmente le strategie	Utilizza consapevolmente le strategie
Transfert di abilità	Transfert di abilità
Usa inconsciamente, nel Problema dei Fagioli, e consciamente, nel Solitario Triangolare, il ragionamento regressivo: non è sicura di quando lo sta usando e quando no.	Usa consciamente il ragionamento regressivo nella risoluzione dei solitari

Tabella 6.3.1 - Profili

CONCLUSIONI

I risultati ottenuti dall'analisi dei dati raccolti durante la ricerca hanno evidenziato la validità dell'ipotesi di partenza, per cui possiamo affermare che:

La strategia del ragionamento regressivo si sviluppa maggiormente nella risoluzione dei giochi di strategia rispetto a quanto si sviluppa in quella dei problemi.

Con questa ricerca siamo riusciti a ottenere risultati significativi per quanto riguarda i nostri obiettivi generali:

- Esplorare con studenti universitari del quarto anno, potenzialmente futuri docenti, i procedimenti euristici che si sviluppano sia nell'approccio a giochi di strategia che nella soluzione di problemi matematici;
- Analizzare con la lente della Logica della Ricerca lo sviluppo del pensiero strategico nella ricerca di una strategia vincente da parte di studenti scelti del gruppo di studio osservati mentre risolvono problemi matematici e affrontano giochi di strategia.

Riportiamo i risultati ottenuti dall'analisi generale del gruppo di studio e da quella relativa allo studio di caso, organizzandoli intorno agli obiettivi specifici che abbiamo evidenziato all'inizio del lavoro (si veda l'Introduzione).

1. VALUTARE LE ATTITUDINI NEI CONFRONTI DELL'USO DEI GIOCHI NELLA DIDATTICA, IN STUDENTI FUTURI DOCENTI

Come si può notare dai grafici riportati nel capitolo 4, la quasi totalità degli studenti del gruppo di studio è favorevole all'uso dei giochi nella didattica (91%) nonostante ci sia

una percentuale importante di non giocatori (39%) e di studenti non interessati ai giochi (39%).

Quest'alta percentuale di studenti favorevoli fa ben sperare nella prospettiva di continuare a proporre i giochi nelle classi come attività didattica. La percentuale discretamente alta di studenti non interessati ai giochi invece ci lascia qualche dubbio. In una prospettiva futura, un insegnante non interessato ai giochi potrebbe pensare di non proporre un'attività ludica a una classe, perdendo un importante strumento cognitivo. Decidesse di proporla perché spinto da interessi didattici, invece, potrebbe non riuscire a coinvolgere gli studenti, non riuscendo a implicarsi lui stesso, rischiando così di perdere tempo in un lavoro che non apporta miglioramenti cognitivi nel gruppo classe. Una maggiore informazione riguardo i molteplici giochi utilizzabili e, soprattutto, al loro possibile uso nelle lezioni di matematica, potrebbe migliorare l'interesse nei loro confronti.

2. ANALIZZARE L'USO DELLE STRATEGIE DI RISOLUZIONE NEI PROBLEMI E NEI GIOCHI PROPOSTI, NELLO SPECIFICO:

a. Analizzare quali particolari e diverse strategie vengono sviluppate nelle differenti risoluzioni

Problema dei Fagioli

La maggioranza delle strategie che risultano efficaci sono state utilizzate da un numero esiguo di studenti (si veda capitolo 5). In questo problema, la difficoltà maggiore che si è riscontrata è stata nella fase della sua rappresentazione. Un'alta percentuale di studenti infatti l'ha interpretato immediatamente come un problema di probabilità, applicando le nozioni apprese in materia. Questo, molto probabilmente dovuto alla struttura del problema, ha fatto sì che molti studenti spendessero le loro energie e il poco tempo a disposizione in calcoli complessi, senza avere il tempo di studiare

approfonditamente altre strategie per arrivare alla soluzione. E' questo il caso di Martín che utilizza le nozioni di probabilità e, quando decide di utilizzare un'altra strategia, non riesce ad arrivare alla soluzione proprio per mancanza di tempo (si veda capitolo 6).

Problema dei Cammini

Anche in questo caso la maggioranza delle strategie ritenute efficaci viene utilizzata da un numero esiguo di studenti (si veda capitolo 5). Una percentuale abbastanza alta di loro lo ha valutato difficile (56%), pur se comunque la maggior parte è arrivata alla soluzione del problema (70%). Spicca in alcuni protocolli la combinazione efficace di due strategie: *Risolvere un problema più semplice* e *Praticare l'induzione*. Ridurre l'ordine del triangolo proposto nel problema, trovando così una base dell'induzione, porta a risolvere il problema arrivando a una formula generale legata all'ordine del triangolo ($2^n - 1$). Sostituendo il valore 7 nella formula è facile arrivare alla soluzione. Anche in questo caso possiamo ritrovare questa situazione nel protocollo di Martín (si veda capitolo 6).

Solitario Triangolare

In questo gioco, le strategie maggiormente utilizzate fanno parte di quelle ritenute efficaci (si veda capitolo 5). Non sembra ci siano state molte difficoltà nella risoluzione di questo solitario, infatti una maggiore percentuale di studenti, questo probabilmente dovuto al maggior tempo a disposizione, è potuta arrivare alla conclusione (74%). In questo problema, tra quelli proposti, si è sviluppato maggiormente l'uso della strategia del ragionamento regressivo. Ciò è dovuto al fatto che si conosceva la soluzione del problema da cui partire per progredire regressivamente: un'unica pedina sul tavolo da gioco. L'alta percentuale di studenti che fanno tentativi senza una strategia specifica non sarebbe preoccupante se questa "strategia" fosse usata solamente nella prima parte della risoluzione, ovvero nella fase di familiarizzazione, come fanno per esempio i

due casi approfonditi (si veda capitolo 6). Il fatto, invece, che questa, in più della metà degli studenti (65%), sia praticamente l'unica strategia seguita può indicare una mancanza di abilità strategiche negli alunni del gruppo di studio forse dovuta al fatto che, mentre nelle scuole primarie e secondarie, in questi ultimi anni, si stanno presentando attività che possono sviluppare queste abilità, nei programmi dei corsi universitari queste attività non vengono proposte.

Solitario della Bastiglia

Oltre la metà delle strategie maggiormente utilizzate sono tra quelle che riteniamo efficaci (si veda capitolo 5). In questo solitario, solamente 2 coppie di studenti sono arrivate alla soluzione. Molto probabilmente questo è dovuto al fatto che, oltre al poco tempo a disposizione, questo solitario avesse un tavolo da gioco con molte pedine. Come abbiamo già osservato nel precedente, anche qui c'è un'alta percentuale di studenti che giocano senza una strategia specifica, a conferma del fatto che molto probabilmente nel gruppo di studio è presente una carenza di abilità strategiche. Interessante è notare come l'elevato numero di pedine e la forma del tavolo da gioco spingano gli studenti a provare a scomporre il tavolo stesso in insiemi più piccoli e a risolvere il solitario per parti, come troviamo nel protocollo redatto da Miriam (si veda capitolo 6).

b. Studiare la differenza dello sviluppo delle diverse strategie nella risoluzione dei problemi e nella risoluzione dei giochi.

Per riassumere efficacemente l'uso delle strategie nella risoluzione dei differenti problemi, riportiamo la tabella 5.5 (si veda capitolo 5).

Strategie	Problem Fagioli	Problem Cammini	Solitario Triangol	Solitario Bastiglia
Tentativi ed errori	-	-	13%	6%
Risolvere un problema più semplice	9%	25%	6%	6%
Scomporre il problema, semplificare	-	-	3%	63%
Estrarre regolarità, praticare l'induzione	-	25%	-	-
Risolvere problemi simili, analogie	6%	3%	3%	13%
Seguire un metodo, organizzarsi	41%	41%	34%	38%
Fare schemi e tabelle	6%	6%	-	-
Fare disegni e rappresentazioni grafiche	75%	66%	50%	13%
Fare uno studio sistematico di tutti i casi	13%	50%	-	-
Utilizzare un linguaggio algebrico	41%	3%	-	-
Utilizzare diagrammi ad albero	19%	19%	-	-
Approfittare della simmetria	9%	59%	41%	28%
Dedurre e trarre conclusioni	6%	-	-	-
Fare congetture sulla soluzione	9%	-	6%	-
Analizzare casi limite	19%	-	-	-
<u>Utilizzare il ragionamento regressivo</u>	9%	25%	59%	38%
Fare uso delle nozioni apprese di probabilità	44%	9%	-	-
Fare tentativi senza una strategia specifica	-	-	78%	56%
Riconoscere il ruolo delle pedine	-	-	50%	19%

Tabella 5.5

Nel capitolo 5, abbiamo considerato che a seconda della struttura dei problemi proposti, che siano giochi o no, vengono sviluppate maggiormente alcune strategie rispetto ad altre. In ogni caso possiamo fare alcune osservazioni che riteniamo interessanti:

- Le strategie più grafiche, quali *Fare schemi e tabelle*, *Fare disegni e rappresentazioni grafiche* e *Utilizzare diagrammi ad albero*, vengono utilizzate meno nella risoluzione dei giochi che in quella dei problemi. Questo potrebbe essere dovuto al fatto che per risolvere il gioco, dotato di un tavolo su cui muovere le pedine, gli studenti non sentano il bisogno di descrivere la situazione graficamente.
- Le strategie che abbiamo deciso di includere ad hoc, tra le altre che si trovano in letteratura, per effettuare meglio l'analisi sono: *Fare uso delle nozioni di probabilità*, *Fare tentativi senza una strategia specifica* e *Riconoscere il ruolo delle pedine sul tavolo da gioco*; esse sono state sviluppate solamente in una delle due tipologie di problema.
- La strategia *Approfittare della simmetria* viene sviluppata con percentuali molto simili in tutti e quattro i problemi. Possiamo però notare che, tra le quattro percentuali, la più bassa è quella relativa al Problema dei Fagioli. Nonostante i passaggi di fagioli tra un sacco e l'altro siano simmetrici, il fatto che il numero di fagioli totali nei due sacchi sia differente molto probabilmente ha fatto sì che la maggior parte degli studenti non si rendesse conto della simmetria. Stupisce invece che solamente il 28% degli studenti abbia approfittato della simmetria del tavolo da gioco del Solitario della Bastiglia, che in questo caso è molto evidente.
- **Il Ragionamento regressivo**, come avevamo ipotizzato all'inizio del lavoro di ricerca (si veda l'introduzione), **è utilizzato maggiormente nella risoluzione dei solitari rispetto a quanto è utilizzato in quella dei problemi**. Analizzando i protocolli di risoluzione, alunno per alunno, si può notare che il 22% degli studenti utilizza la strategia sia nel Solitario Triangolare che in quello della Bastiglia. Possiamo ipotizzare che per questi casi ci sia un transfert dell'abilità da un gioco all'altro. Sicuramente questo è il caso di Martín (si veda capitolo 6).

3. ANALIZZARE IN PARTICOLARE LO SVILUPPO DELLA STRATEGIA DEL RAGIONAMENTO REGRESSIVO

Analizzando i protocolli di risoluzione, possiamo notare che, come affermato nel paragrafo precedente, la percentuale di studenti che utilizza la strategia del ragionamento regressivo aumenta passando dalla risoluzione dei problemi a quella dei

solitari. Dall'analisi più approfondita di questa strategia possiamo individuare alcuni aspetti importanti.

1. Possibile transfert della strategia tra i solitari

Abbiamo notato che il 22% degli studenti utilizza la strategia nella risoluzione di entrambi i solitari. Il 6% degli studenti che non utilizza la strategia nel Solitario Triangolare e la utilizza in quello della Bastiglia lavora alla risoluzione del secondo in coppia con uno studente che ha utilizzato la strategia nel primo. Da queste osservazioni abbiamo ipotizzato che ci fosse un transfert dell'abilità tra la risoluzione dei due solitari. Durante lo studio di caso questa ipotesi è stata confermata. Martín infatti è uno degli studenti che utilizzano la strategia in entrambi i solitari. Possiamo notare non tanto dalla stesura del protocollo quanto dalla videoregistrazione che in questo caso avviene il transfert. Molto probabilmente questo si attiva perché i movimenti che si possono fare sul tavolo da gioco dei due solitari sono simili.

2. Strategie che aiutano lo sviluppo

Osservando la tabella 5.10 (capitolo 5) abbiamo notato che la strategia viene utilizzata in contemporanea alle strategie *Seguire un metodo*, *organizzarsi* e *Fare disegni e rappresentazioni grafiche*. Da quest'analisi possiamo notare che essere organizzati nella risoluzione e fare dei disegni o delle rappresentazioni grafiche aiutano lo studente nello sviluppo della strategia.

3. Difficoltà nella creazione dell'oggetto soluzione

Dall'analisi del questionario 5 (si veda capitolo 5) possiamo notare che la creazione dell'oggetto soluzione è la maggiore difficoltà che incontrano gli studenti per poter usare la strategia del ragionamento regressivo. La mancanza di questo processo fa sì che una larga parte degli studenti non riesca a utilizzare questa strategia.

4. Difficoltà nel riconoscere la strategia

La maggioranza degli studenti (59%), nel questionario 5, risponde che non utilizza quasi mai la strategia del ragionamento regressivo (di veda capitolo 5). Il fatto che affermino che non sono soliti usarla non significa necessariamente che davvero non la

usino. Miriam, per esempio, nel colloquio individuale afferma che non sempre riesce a riconoscere questa strategia quando la utilizza (si veda capitolo 6). Spiega infatti che l'ha sempre utilizzata in contesti in cui una persona competente le presentava esercizi e problemi ad hoc in cui si dovesse usare. Quando la usa invece in autonomia non sempre si rende conto di utilizzarla. Le risposte al questionario 5 degli studenti del gruppo di studio confermano quest'idea. Ci sono alcuni studenti che effettivamente rispondono che utilizzano la strategia ma poi nei protocolli non risulta, mentre ce ne sono altri che dichiarano di non averla usata e che in realtà lo hanno fatto.

4. ANALIZZARE I PERCORSI DI PENSIERO CHE PORTANO ALLA FORMULAZIONE DI UNA STRATEGIA VINCENTE

Dal momento che il Modello di Toulmin per le argomentazioni è insufficiente per analizzare i protocolli di risoluzione, abbiamo utilizzato la struttura metodologica di interpretazione elaborata da Arzarello e il Modello di Habermas (si veda capitolo 6). In seguito all'analisi, possiamo concludere che lo sviluppo del pensiero strategico è caratterizzato da un'alternanza tra formulazione di piani di risoluzione e esplorazioni. Gli studenti infatti, durante lo svolgimento del protocollo, sviluppano diverse strategie (piani). Il processo per arrivare alla strategia vincente è abbastanza lungo e difficoltoso. Infatti dopo la formulazione di una strategia, gli studenti provano ad applicarla al problema cercando di raggiungere la soluzione. Il passaggio da una strategia all'altra, dopo aver capito che la strategia che si sta usando non è quella vincente, avviene tramite un momento di controllo. Dopo una fase esplorativa, applicando la strategia scelta, gli alunni riflettono sulla sua maggiore o minore validità. Sono questi i momenti in cui è più forte la componente epistemica della razionalità. Le modalità per farlo sono molto diverse. Alcuni studenti utilizzano immagini e grafici (questo è per esempio il caso di Miriam, si veda capitolo 6), altri si affidano di più a formule risolutive (questo per esempio è il caso di Martín, si veda capitolo 6). Il cambiamento tra una strategia e l'altra avviene in due modi differenti:

- la vecchia strategia viene sostituita dalla nuova strategia
- la vecchia strategia viene modificata leggermente
- la vecchia strategia viene combinata con un'altra e le due strategie vengono sviluppate contemporaneamente

La combinazione tra le diverse strategie porta alla soluzione dei problemi proposti. Anche la verifica della soluzione ottenuta, quando è presente all'interno del protocollo, è caratterizzata dall'uso di differenti strategie. In queste parti di protocollo, per quanto riguarda i problemi, in particolare quello dei Fagioli, troviamo lo sviluppo del ragionamento regressivo (questo ad esempio è il caso di Miriam, si veda capitolo 6).

Al termine di questa ricerca possiamo confermare che i giochi di strategia sono utili come strumento metodologico per l'introduzione e il consolidamento delle diverse strategie di risoluzione, in particolare per lo sviluppo del ragionamento regressivo. Sono uno strumento adatto per sviluppare il pensiero strategico, a sua volta indispensabile per la risoluzione dei problemi. L'attività di gioco favorisce l'uso di strategie che normalmente non vengono utilizzate o che vengono sviluppate in grado minore.

Sul differente sviluppo delle strategie influisce il tipo di gioco proposto. Centrando lo studio della nostra ricerca sul ragionamento regressivo abbiamo scelto i due solitari perché adatti allo sviluppo di questa strategia. Scegliere il tipo di gioco è importante ai fini di conseguire l'obiettivo previsto dall'attività. A seconda della strategia su cui si vuole concentrare l'attenzione, infatti, esistono giochi più adatti di altri. Gómez-Chacón (1992) e Corbalán (1994 e 1997) ne elencano alcuni, suddividendoli a seconda della strategia che si vuole sviluppare maggiormente. Gli studenti hanno accolto bene l'opportunità di usufruire dei giochi all'interno di una lezione, anche se sicuramente non abituati a utilizzarli durante le lezioni universitarie. Si sono impegnati nella

risoluzione e, data la scelta dei giochi solitari, hanno potuto riflettere sul proprio operato. Avendo più tempo a disposizione, una fase più ampia dedicata alla condivisione delle difficoltà incontrate e dei procedimenti messi in atto per giungere alla soluzione potrebbe portare, tramite il confronto, allo sviluppo di riflessioni sui procedimenti stessi e forse all'uso di nuove strategie vincenti.

Nonostante le difficoltà esplicitate dagli studenti e la convinzione da parte loro di usare poco il ragionamento regressivo nella risoluzione dei problemi, abbiamo potuto confermare l'ipotesi che, utilizzando i giochi, questo processo cognitivo viene sviluppato maggiormente. Le difficoltà legate alla creazione dell'oggetto soluzione e al riconoscimento della strategia diminuiscono e la percentuale di sviluppo della strategia cresce.

Dopo aver confermato l'utilità del gioco come strumento per lo sviluppo del ragionamento regressivo, sarebbe interessante proseguire gli studi sull'argomento, cercando di proporre attività da cui si possano estrapolare maggiori informazioni circa le strategie che ne aiutano lo sviluppo. In seguito si potrebbero strutturare attività di gioco, con giochi scelti appositamente, che aiutino a sviluppare, oltre al ragionamento regressivo in sé, anche queste strategie complementari, così che gli studenti possano superare le difficoltà relative all'uso di questo processo cognitivo. In particolare si potrebbe concentrare l'attenzione sulla creazione di una soluzione e sul riconoscimento della strategia utilizzata.

Nonostante l'esiguo numero degli studenti del gruppo di studio, come si è potuto vedere in queste pagine, si sono potuti ricavare dei risultati significativi e interessanti. Pensiamo che la ricerca effettuata possa essere un buon punto di partenza per ricerche future. Con un gruppo di studio più ampio si potrebbe condurre un'indagine quantitativamente più rappresentativa sulle difficoltà derivanti dall'uso del ragionamento regressivo e si potrebbe quindi in seguito studiare un'attività di gioco, individuata ad hoc, da proporre nelle lezioni di matematica nelle scuole secondarie o nelle lezioni universitarie, per aiutare gli studenti nello sviluppo della strategia.

BIBLIOGRAFIA

- ANTINUCCI, F. (2001), *La scuola si è rotta: Perché cambiano i modi di apprendere*, Edizioni Laterza
- ARZARELLO, F. (2014), Appunti del seminario A new structural approach to argumentation in mathematics: from Toulmin model to Hintikka logic of inquiry, all'interno del Workshop: *Mathematics education as a transversal discipline* del 21 novembre 2014, presso il Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università degli Studi di Torino
- BALL, W.W.R. e COXETER, H.S.M. (1974), *Mathematical recreations and essays*, Toronto, University press
- BELL, R. e CORNELIUS, M. (1990), *Juegos con tablero y fichas*, Editorial Labor, (Edizione in castellano di BELL, R. y CORNELIUS, M. (1988), *Board Games Round the World*, Cambridge University Press, Cambridge)
- BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J.H. e GUY, R.K. (1982), *Winning Ways: for your mathematical plays*, Vol. 2, Games in particular, Academic Press Inc., London, pp.697-734
- BOERO, P., DOUEK, N., MORSELLI, F. e PEDEMONTE, B. (2010), "Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation", in *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, Pinto, M.M.F. & Kawasaki, T.F. Editors, Belo Horizonte, Brazil: PME
- BOUVIER, A. e GEORGE, M. (1984), *Dictionnaire des mathématiques*, Presses universitaires de France
- BROUSSEAU, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, pp. 1-76
- CHI, M. T. H. e GLASER, R. (1983), *Problem solving abilities*, University of Pittsburgh, Learning research and development center
- CORBALÁN, F. (1994), *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid
- CORBALÁN, F. (1997), *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria*, tesi di dottorato, Facultat de Ciències de l'Educació, Departament de Didàctica de la Matemàtica y de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, discussa nell'a.a. 1996/97, rel. Deulofeu Piquet, J.

- DE GUZMÁN, M. (1984), "Juegos matemáticos en la enseñanza", in *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, 10-14 settembre 2014*, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton
- DE GUZMÁN, M. (1984b), *Cuentos con cuentas*, Editorial Labor, S.A, Barcelona
- DE GUZMÁN, M. (2004), "O sentido da educação matemática e a orientação actual do nosso sistema educativo", in *Educação e Matemática*, nº 78, pp. 21-23
- DÉNIZ, G. (1997), "El solitario: un juego con mucho juego", *Números*, nº 31, pp. 3-14
- DEZA, A. e ONN, S. (2002), "Solitaire Lattices", *Graphs and Combinatorics*, Springer-Verlag, pp. 227-243
- GARDNER, M. (1966), *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.
- GARDNER, M. (1983), *Circo matemático*, Alianza Editorial, Madrid
- GARRIS, R., AHLERS, R. e DRISKELL, J.E. (2002), "Games, Motivation and Learning: A research and practice model", in *Simulation and Gaming*, Vol. 33, nº 4, pp. 441-467
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (1988), "Mathematical thought: A classroom experience", in VV.AA. *El profesor y la experiencia curricular*, University of Seville publications, pp.. 107-112
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (1990), "Strategic games in the curriculum of mathematics", in VV.AA. *Cambio educativo y Desarrollo Profesional (Educational change and professional development)*, University of Seville Publications, pp. 323-330
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (1992), "Los juegos de estrategias en el curriculum de matemáticas", *Collección Apuntes IEPS*, n.º 55, Narcea, Madrid
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (2005), "Motivar a los alumnos de Secundaria a hacer matemáticas", in *Curso Piloto, Matemáticas: Pisa en la Práctica* organizado por Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Instituto Superior de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación, Federación de Sociedades de profesores de Matemáticas
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (2014), *Modelling the use of fuzzy sets in the studio of solving problems heuristics in mathematics*, Cátedra UCM Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M^a (2015), "Meta-emotion and Mathematical modeling processes in computerized environments", in *From beliefs and affect to*

dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions, B. Pepin & B. Rösken-Winter Editors, Springer, Switzerland, pp. 201-226

GÓMEZ-CHACÓN e GARCÍA-HONRADO (in stampa), "Puzzlement in mathematics: relationships between emotions and heuristics", in *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*

GRUPO ALQUERQUE (2005), "Stomachion. El cuadrado de Arquímedes", in *Suma*, n.º 50.

HINTIKKA, J. (1996), *The Principles of mathematics revisited*, Cambridge University Press

HUIZINGA, J. (1949), *Homo ludens: A study of the play-element in culture*, Routledge & Kegan Paul, London

KIILI, K. (2005), "Digital game-based learning: Towards an experiential gaming model", in *The Internet and Higher Education 8*, Elsevier Inc., pp. 13-24

MALBA T. (1996), *L'uomo che sapeva contare*, Salani Editore

MARTIGNONE, F. & SABENA, C. (2014), "Analysis of argumentation processes in strategic interaction problems", in *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vancouver, Canada, pp. 218-223

MASON, J., BURTON, L. e STACEY, K. (1985), *Thinking mathematically*, Addison-Wesley Editors, Wokingham, United Kingdom

MAURENSIG, P. (1995), *La variante di Lüneburg*, Adelphi

PESCI, A., *I suggerimenti della ricerca in didattica della matematica per la pratica scolastica. Appunti per il corso di Didattica della Matematica*, Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, anno accademico 2007/08

POLYA, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, Editor Trillas, Mexico, (Edizione in castellano di POLYA, G. (1945), *How to solve it?*, Princeton University Press, USA)

PRENSKY, M. (2005), "Computer games and learning: digital game-based learning", in *Handbook of computer games studies*, Reassens, J. e Goldstein, J. Editors, MIT Press, Cambridge

SANTOS-TRIGO, M. & MORENO-ARMELLA, L (2013), "Mathematical Problem-Solving by Prospective Teachers", in *Montana Mathematics Enthusiast Journal*, Special volume to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, 10 (1 e 2), Age Publishing, Montana, USA

SCHAAF, W. L. (2015), "Number game", in *Encyclopædia Britannica. Encyclopædia Britannica Online* SCHOENFELD, A. H. (1985), *Mathematical problem solving*, Editors Academic Press, Orlando, USA

SHUTE, V.J., RIEBER, L., & VAN ECK, R. (2011), "Games ... and ... learning", in *Trends and issues in instructional design and technology (3rd ed.)*, R. Reiser & J. Dempsey Editors, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, pp. 321–332

VALLOT, J. N., "Rapport sur un travail de Suremain de Missery: Théorie générale de jeu de solitaire, considéré comme problème d'analyse et de situation", in *Compte-Rendu des Travaux de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon, Années 1841-1842*, pp. 58-70

SITOGRAFIA

BELL, G., "*Peg Solitaire*", *comcast.net*, data di aggiornamento 16 agosto 2015, consultato il 25 agosto 2015

BELL, G., "*Triangular Peg Solitaire*". *comcast.net*, data di aggiornamento 23 agosto 2015, consultato il 25 agosto 2015

KÖLLER, J. (2000), "*Peg solitaire*", *mathematische-basteleien.de*, consultato il 25 agosto 2015

"*Le solitaire*", *eternitygames.free.fr*, data di aggiornamento 20 settembre 2005, consultato il 25 agosto 2015